1 Gaia Multzoen teoria

Multzo eragiketak

Bildura ($A\cup B$):

$\forall x\in A\cup B \quad x\in A \vee x\in B$

Diferentzia ($A-B$)

$\forall x\in B-A \quad x\in B \quad x\notin A$

Ebakidura ($A\cap B$):

$\forall x\in A\cap B \quad x\in A \wedge x\in B$

Osagarria:

$\forall x\in A^c \quad x\notin A$

Disjuntuak baldin

$A\cap B=\emptyset \rightarrow \nexists x \rightarrow x\in A \wedge x\in B$

Propietateak:

Trukatze:

$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

Banatze:

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Elkartze:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

De Morgan:

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

Indenpotentzia:

$A\cup A=A$

$A\cap A=A$

Beste propietate batzuk:

$A\cup U=U \quad A\cap U=A \quad U^c=\emptyset \quad |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$A\cup A^c=U \quad A\cap A^c=\emptyset \quad \emptyset^c=U$

$A\cup\emptyset=A \quad A\cap\emptyset=\emptyset \quad (A^c)^c=A$

$A\subseteq A\cup B \quad A\cap B\subseteq A \quad |A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Definizioak:

Multzo berdinak

Bi multzo A eta B berdinak dira, $A=B$ baldin elementu berdinak badituzte, $A\subseteq B$ eta $B\subseteq A$.

Azpimultzo propioa

A multzoa B multzoaren azpimultzo propioa da baldin $A\subset B$, hau da, $A\subseteq B$ eta $A\neq B$.

Potentzia multzoa

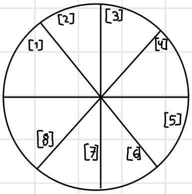
A multzoa izanik, A-ren potentzia multzoa, $P(A)$, A ren azpimultzo guztien bilduma da.

Multzo baten partizioa

A multzoaren partizioa A-ren azpimultzo ez hutsen familia bat da. Azpimultzo hauek elkarren artean disjuntuak dira eta guztien bildura A da.

$P=\{A_i : i\in I\}$ (I= Indize multzoa)

- $(\forall i\in I)\ \emptyset\neq A_i\subseteq A \rightarrow$ Azpimultzo ez hutsak
- $(\forall i,j\in I)\ A_i\neq A_j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset \rightarrow$ Ez dago elementu berbera bi partiziotan.
- $\bigcup_{i\in I} A_i=A$



Biderkadura Kartesiarra

$A\times B:=\{(x,y) \cdot x\in A \text{ eta } y\in B\} \rightarrow$ A eta B multzoen bikote ordenatuen multzoa da.

2.6aia. ErlazioaK eta funtzioaK

2.1 Erlazioak

Erlazioen propietateaK:

Erlazio bihurKorra: $\forall x \in A \ xRx$

Erlazio simetriKoa: $\forall x,y \in A \ xRy \rightarrow yRx$

Erlazio antisimetriKoa: $\forall x,y \in A \ xRy$ eta $yRx \rightarrow x=y$

Erlazio iraganKorra: $\forall x,y,z \in A \ xRy$ eta $yRz \rightarrow xRz$

DefinizioaK

Erlazio bitarra: $A \times A$ Ko parte den edozein R azpimultzo da, hau da, $R \subseteq A \times A$.

Baldin $(a,b) \in R$ "a" elementua "b" rekin erlazionatuta dagoela esango dugu

Biderkadura Kartesiarra: $A \times B := \{(x,y) \cdot x \in A$ eta $y \in B\} \rightarrow A$ eta B multzoen biKote ordenatuen multzoa da.

Ordena erlazioa:

BihurKor, antisimetriKo eta iraganKor

totala $\Longleftrightarrow \forall x,y \in A \ xRy$ edo yRx

partziala beste Kasuetan.

Multzo baten partizioa:

Aren azpimultzo ez hutsen familia bat da, non azpimultzo elKarren artean disjuntuak dira eta guztien bildura A da.

$P = \{A_i : i \in I\}$ (I: indize multzoa)

BalioKidetasun erlazioa:

BihurKor, simetriKo eta iraganKor

BalioKidetasun Klasea:

$[a] := \{x \in A$ non $xRa\}$

Teorema

Izan bedi A-Ko R balioKidetasun erlazioa, A multzoaren gaineKo balioKidetasun Klase guztien bildumaK A ren partizio bat osatzen dute; A-ren zatidura multzoa.

$A/R = \{[x]$ non $x \in A\}$

$[a]$ ren ordezKaria: $[a]$ Ko edozein elementu

2.2 FuntzioaK

A eta B multzoaK emaniK AtiK BraKo f funtzioa A Ko elementu bakoitzari B Ko elementu bat elKarteen dion legea da.

$f: A \longrightarrow B \qquad A \xrightarrow{f} B$

Iturburu multzoa: A

Helburu multzoa: B

Irudia eta aurreirudia

Izan bedi $a \in A$ eta $b \in B$

a ren irudia b da

eta a elementua b ren aurreirudia da.

Funtzio berdinaK

bi funtzio berdinaK dira baldin iturburu eta helburu multzo beraK badituzte eta $\forall x \in A \ f(x) = g(x)$

Funtzio motaK:

SuprajeKtiboaK:

$f: A \rightarrow B$ funtzioa suprajeKtiboa da baldin B-Ko elementu oroK aurreirudiriK badu An.

Injektiboa:

B Ko elementu bakoitza gehienez behin agertzen bada A Ko elementu baten irudi moduan.

$\forall x_1, x_2 \in A \ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

BijeKtiboa: baldin injeKtibo eta suprajeKtibo

Teorema:

Izan bedi $f: A \to B$ funtzioa A eta B multzo finituak izanik eta

$|A|=|B|$ f suprajektiboa $\iff f$ injektiboa

Alderantzizko funtzioa

Izan bedi $f: A \to B$ funtzio bijektiboa

alderantzizko funtzioa honela definitzen da.

$f^{-1}: B \longrightarrow A$

$y \longrightarrow x$

f suprajektiboa denez $\exists x$ eta injektiboa denez, x bakarra da.

hortaz f^{-1} funtzioa da.

f^{-1} ere bijektiboa da.

Funtzioen Konposaketa

Izan bitez $f: A \to B$ eta $g: B \to C$ funtzioak. f eta g ren funtzio konposatua honela definitzen da.

$g \circ f : A \longrightarrow C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in A.$

Propietateak:

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$
2. $f \circ id_A = f$ $\quad id_B \circ f = f$
3. $f^{-1} \circ f = id_A$ $\quad f \circ f^{-1} = id_B$
4. $f, g \to$ injektiboak $\Longrightarrow g \circ f$ injektiboa
5. $f, g \longrightarrow$ suprajektiboak $\Longrightarrow g \circ f$ suprajektiboa.
6. $f, g \longrightarrow$ bijektiboak $\Longrightarrow g \circ f$ bijektiboa
7. f eta g bijektiboak badira $\Longrightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$