2. Gaia. Erlazioak eta funtzioak

2.1 Erlazioak

Erlazioen propietateak:

Erlazio bihurkorra: $\forall x \in A \quad xRx$

Erlazio simetrikoa: $\forall x,y \in A \quad xRy \rightarrow yRx$

Erlazio antisimetrikoa: $\forall x,y \in A \quad xRy$ eta $yRx \rightarrow x=y$

Erlazio iragankorra: $\forall x,y,z \in A \quad xRy$ eta $yRz \rightarrow xRz$

Definizioak

Erlazio bitarra: $A \times A$ ko parte den edozein R azpimultzo da, hau da, $R \subseteq A \times A$.

Baldin $(a,b) \in R$ "a" elementua "b" rekin erlazionatuta dagoela esango dugu

Biderkadura Kartesiarra: $A \times B := \{(x,y) \cdot x \in A$ eta $y \in B\} \rightarrow$ A eta B multzoen bikote ordenatuen multzoa da.

Ordena erlazioa:

Bihurkor, antisimetriko eta iragankor

totala $\Longleftrightarrow \forall x,y \in A \quad xRy$ edo yRx

partziala beste kasuetan.

Multzo baten partizioa:

A ren azpimultzo ez hutsen familia bat da, non azpimultzo elkarren artean disjuntuak dira eta guztien bildura A da.

$P = \{A_i : i \in I\}$ (I: indize multzoa)

Baliokidetasun erlazioa:

Bihurkor, simetriko eta iragankor

Baliokidetasun klasea:

$[a] := \{x \in A$ non $xRa\}$

Teorema

Izan bedi A-ko R baliokidetasun erlazioa, A multzoaren gaineko baliokidetasun klase guztien bildumak A ren partizio bat osatzen dute; A-ren zatidura multzoa.

$A/R = \{[x]$ non $x \in A\}$

$[a]$ ren ordezkaria: $[a]$ ko edozein elementu

2.2 Funtzioak

A eta B multzoak emanik A tik B rako f funtzioa A ko elementu bakoitzari B ko elementu bat elkarteen dion legea da.

$f: A \longrightarrow B \qquad A \xrightarrow{f} B$

Iturburu multzoa: A

Helburu multzoa: B

Irudia eta aurreirudia

Izan bedi $a \in A$ eta $b \in B$

a ren irudia b da

eta a elementua b ren aurreirudia da.

Funtzio berdinak

bi funtzio berdinak dira baldin iturburu eta helburu multzo berak badituzte eta $\forall x \in A \; f(x) = g(x)$

Funtzio motak:

Suprajektiboak:

$f: A \rightarrow B$ funtzioa suprajektiboa da baldin B-ko elementu orok aurreirudirik badu A n.

Injektiboa:

B ko elementu bakoitza gehienez behin agertzen bada A ko elementu baten irudi moduan.

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Bijektiboa: baldin injektibo eta suprajektibo

Teorema:

Izan bedi $f: A \to B$ funtzioa A eta B multzo finituak izanik eta $|A|=|B|$ f suprajektiboa $\iff$ f injektiboa

Alderantzizko funtzioa

Izan bedi $f: A \to B$ funtzio bijektiboa alderantzizko funtzioa honela definitzen da.

$f^{-1}: B \longrightarrow A$

$y \longrightarrow x$

f suprajektiboa denez $\exists x$ eta injektiboa denez, x bakarra da.

hortaz f^{-1} funtzioa da.

f^{-1} ere bijektiboa da.

Funtzioen Konposaketa

Izan bitez $f: A \to B$ eta $g: B \to C$ funtzioak. f eta g ren funtzio konposatua honela definitzen da.

$g \circ f : A \longrightarrow C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A.$

Propietateak:

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$
2. $f \circ id_A = f \qquad id_B \circ f = f$
3. $f^{-1} \circ f = id_A \qquad f \circ f^{-1} = id_B$
4. $f, g \to$ injektiboak $\Longrightarrow g \circ f$ injektiboa
5. $f, g \longrightarrow$ suprajektiboak $\Longrightarrow g \circ f$ suprajektiboa.
6. $f, g \longrightarrow$ bijektiboak $\Longrightarrow g \circ f$ bijektiboa
7. f eta g bijektiboak badira $\Longrightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$