Predikatu-Logika

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Informatika fakultatea
Donostia

Sarrera. Formalizazioa

Argumentuen formalizazioa logikan sinboloen bidez.
Esaldiaren analisiaren konplexutasunaren arabera, bi maila:

- Proposizio-logika: Formalizaziorako oinarrizko elementuak esaldi deklaratzaile bakunak (proposizioak) dira. Esaldia zatiezina da. Argumentuaren baliozkotasuna proposizioen arteko erlazioan oinarritzen da.
- Predikatu-logika: Esaldiaren egitura aztertuko da.
  - Terminoak edo konstanteak: Banakoak (pertsonak, zenbakiak, ...). Notazioa (hizki xeheak): a, b, c, ...
  - Predikatuak: Banakoen ezaugarriak (animalia izatea, mendira joatea, ...). Notazioa (hizki larriak): P, Q, ...
    - Aldagaia: x, konstante batez ordezkatua izan daiteke.
    - Proposizioa: P(b), P(l), P(s), ... Egia-balioa dute.
    - Funtzio proposizionala: Aldagaiez osatutako adierazpenak, aldagaiak konstanteez ordezkatuak izatean proposizio bihurtzen direnak. P(x)

Sarrera. Formalizazioa

Funtzio proposizionaletatik proposizioak lortzeko bi modu:

- Aldagaiak instantziatzea: Aldagaiak konstanteez ordezkatzea, P(x)tik P(b) lortzea
- Aldagaiak kuantifikatzea edo zenbatzea: Proposizio orokorrak adierazteko, bi zenbatzaile erabil daitezke.
  - Zenbatzaile unibertsala, $\forall$: $\forall x P(x)$
  - Zenbatzaile existentziala, $\exists$: $\exists x P(x)$

  Lau proposizio-mota:
  - Baiezko unibertsala, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - Baiezko partikularra, $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
  - Ezezko unibertsala, $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
  - Ezezko partikularra, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Sintaxia. Alfabetoa. Ondo eratutako formula

- Alfabetoa: honako sinboloek osatzen dute,
  - Terminoak:
    - Aldagaiak: $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$
    - Konstanteak: $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$
  - Predikatuak: $\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$
  - Lokailuak: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
  - Zenbatzaileak: $\{\forall, \exists\}$

    Lokailuak eta zenbatzaileak hierarkia-mailaka:
    - 1. maila (irismen txikienekoa): $\neg$, $\forall$, $\exists$.
    - 2. maila: $\wedge$, $\vee$.
    - 3. maila (irismen handienekoa): $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
  - Parentesiak eta komak: { (,) , , }
- Predikatuaren aritatea, $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: P predikatuak $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termino baditu n aritatekoa dela esaten da.

Sintaxia. Ondo eratutako formula

- Atomoa: n aritateko P predikatua eta $t_1, t_2, \ldots, t_n$ terminoak izanik, $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomoa edo formula atomikoa da.
- Ondo eratutako formula:
  1. Atomo bat ondo eratutako formula da.
  2. A eta B ondo eratutako formulak badira, $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ere ondo eratutako formulak dira.
  3. A ondo eratutako formula bada eta x aldagai bat bada, $(\forall x A)$ eta $(\exists x A)$ ere ondo eratutako formulak dira.
  4. Ondo eratutako formulak sortzeko modu bakarra aurreko hiru arauak aldi kopuru finituan aplikatzea da.
- Azpiformula: Ondo eratutako G formula emanik, A Gren azpiformula da A osatzen duten sinboloak ondoz-ondokoak badira Gn eta ondo eratutako formula bat osatzen badute.

Oharra: Hemendik aurrera formula aipatzean ondo eratutako formula bati buruz ari garela ulertuko da.

Sintaxia. Ondo eratutako formula

- Zenbatzaile baten irismena: Zenbatzaile baten agerpen batek formularen zein azpiformulari eragiten dion adierazten du, norainokoa den haren eragina.
- Aldagai baten agerpena (lotua/askea): Formula batean aldagai baten agerpena lotua da zenbatzaile batekin badago edo aldagai hori erabiltzen duen zenbatzaile baten irismenaren barne badago. Agerpena lotua ez bada orduan askea da.
- Aldagai lotua/askea: Aldagai bat askea da formula batean gutxienez aldagaiaren agerpen bat askea bada, eta lotua da gutxienez aldagaiaren agerpen bat lotua bada. Aldagai bat aldiberean lotua eta askea izan daiteke.
- Formula itxia: Formula batean aldagaien agerpen askerik ez badago formula itxia dela esaten da.

Notazioa: $A[x]$: x aldagaiaren agerpen askea duen formula,
J: x aldagaiaren agerpen askerik ez duen formula (itxia)

Baliokidetza-logikoak predikatu-logikan

Proposizio-logikako baliokidetza-logikoak (ELKAR, TRUK, BANA, TAUT, UB, DeM, TRANS, INP, BALIO, ESP) predikatu-logikan ere baliokidetza-logiko dira.
Horiez gain, zenbatzaileen baliokidetzak daude.

- Zenbatzaileen baliokidetza-logikoak:
  1. $\neg\forall x A[x] \equiv \exists x \neg A[x]$
  2. $\forall x \neg A[x] \equiv \neg\exists x A[x]$
  3. $\forall x A[x] \wedge \forall x B[x] \equiv \forall x(A[x] \wedge B[x])$
  4. $\exists x A[x] \vee \exists x B[x] \equiv \exists x(A[x] \vee B[x])$
  5. 5.1 $\forall x A[x] \vee J \equiv \forall x(A[x] \vee J)$
     5.2 $\exists x A[x] \vee J \equiv \exists x(A[x] \vee J)$
  6. 6.1 $\forall x A[x] \wedge J \equiv \forall x(A[x] \wedge J)$
     6.2 $\exists x A[x] \wedge J \equiv \exists x(A[x] \wedge J)$
- Ez dira baliokidetza-logikoak:
  1. $\forall x A[x] \vee \forall x B[x] \not\equiv \forall x(A[x] \vee B[x])$
  2. $\exists x A[x] \wedge \exists x B[x] \not\equiv \exists x(A[x] \wedge B[x])$

Argumentuen baliozkotasunaren froga

Dedukzio formala
Predikatu-logikan argumentuen baliozkotasunaren froga formala (dedukzio formala) egiteko erabiliko ditugun erregelak:

1. Inferentzia-erregelak (proposizio-logikako 9ak): MP, MT, SH, SD, DE, DS, KS, KK, DB.
2. Ordezkapen erregela: Proposizio-logikako 10 baliokidetzak eta predikatu-logikako zenbatzaileen baliokidetzak erabiltzeko.
3. Baldintzazko Frogaren Erregela (BFE) eta Absurdora Eramatearen Erregela (AEE).
4. Zenbatzaileen erregelak. Erregela berriak dira, frogako errenkada osoei aplikatzeko modukoak.

Argumentuen baliozkotasunaren froga

Zenbatzaileen erregeletan agertuko diren kontzeptu eta notazioak:

- Esango dugu y aldagaia askea dela $x$rako $A(x)$ formulan x aldagaia y aldagaiaz ordezkatzean lortutako $y$ren agerpen guztiek askeak izaten segitzen badute $A(y)$ formulan ($y$ren beste agerpen aske batzuk egon daitezke).
- Notazioa:
  - $A(x)$: Formula bat
  - $A(y)$: $A(x)$ formulan x aldagaiaren agerpen aske guztiak y aldagaiaz ordezkatuz lortutako formula
- Oharrak:
  - $A(x)$ formulan x aske agertzen ez bada, orduan edozein y aldagairako $A(y) = A(x)$
  - $A(x)$ formula izanik, x askea da x aldagairako $A(x)$ formulan

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile unibertsala ezabatzearen erregela ($\forall x$ ezabatu).
$\forall x\ A(x)$ formula izanik, $A(y)$ ondoriozta dezakegu, beti ere y askea bada x aldagairako $A(x)$ formulan edo y konstantea bada.

- Intuitiboki: Unibertsoko $\forall x$ elementurako $A(x)$ egiazkoa bada, egiazko izango da unibertsoko edozein elementu horietako bat adierazten duen y elementuarentzat ere.
- Formalki: Unibertsoko edozein elementu horietako bat y aldagaiaren bidez adierazteko derrigorrezkoa da y askea izatea x aldagairako $A(x)$ formulan.

Adibidea. Txakurrak ugaztunak dira. Txuri txakurra da. Hortaz, Txuri ugaztuna da.

1. $\forall x(T(x) \to U(x))$
2. $T(t) \quad / \therefore \quad U(t)$
3. $T(t) \to U(t)$ — $\forall x$ ezabatu (1), t : kte.(Txuri)
4. $U(t)$ — MP(3,2)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ ezabatu)

Adibidea.

1. $\neg P(x)$
2. $\forall y(P(y) \vee Q(y)) \quad / \therefore \quad Q(x)$
3. $P(x) \vee Q(x)$ — $\forall y$ ezabatu (2) (x askea $y$rako $P(y) \vee Q(y)$ formulan)
4. $Q(x)$ — SD(3,1)

Adibidea. Erregelaren erabilera okerra.

1. $\forall x \exists y P(x, y) \quad / \therefore \quad \exists y P(y, y)$
2. $\exists y P(y, y)$ — $\forall x$ ezabatu (1) (Ezin da! $\exists y P(x, y)$ formulan y ez delako askea $x$rako)

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile unibertsala sartzearen erregela ($\forall x$ sartu)
$A(y)$ formula izanik, $\forall x\ A(x)$ ondoriozta dezakegu, beti ere argumentuko premisek eta indarrean dauden hipotesi eta suposizioek ez badute y aldagaiaren agerpen askerik.

- Intuitiboki: $A(y)$ formulako y aldagaiak unibertsoko edozein elementu bat adierazi behar du. Unibertsoko edozein elementu batentzat egiazkoa dena, guztientzat egiazkoa dela esaten dugu erregela aplikatuz.
- Formalki: $A(y)$ formulako y aldagaiak unibertsoko edozein elementu adierazten duela ziurtatzeko, premisa eta hipotesietan y aske ez agertzea eskatu behar da.

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ sartu)

Adibidea. Hegoafrikan, norbait maite duen orok Nelson Mandela maite du. Hegoafrikan biztanle guztiek maite dute norbait. Hortaz, Hegoafrikan guztiek maite dute Nelson Mandela.

1. $\forall x(\exists y\ M(x,y) \rightarrow M(x,n))$
2. $\forall x\ \exists y\ M(x,y)$ $\quad / \therefore \quad \forall x\ M(x,n)$
3. $\exists y\ M(x,y) \rightarrow M(x,n)$ — $\forall x$ ezabatu (1) (x askea $x$rako $\exists y M(x,y) \rightarrow M(x,n)$ formulan)
4. $\exists y\ M(x,y)$ — $\forall x$ ezabatu (2) (x askea $x$rako $\exists y M(x,y)$ formulan)
5. $M(x,n)$ — MP(3,4)
6. $\forall x\ M(x,n)$ — $\forall x$ sartu (5) (1. eta 2. premisek ez dute x aske)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ sartu)

Adibidea.

1. $\forall y\ P(y,y) \wedge \forall z\ R(z)$ $\quad / \therefore \quad \forall y\ (P(y,y) \wedge R(y))$
2. $\forall y\ P(y,y)$ — KS(1)
3. $P(y,y)$ — $\forall y$ ezabatu (2) (y askea $y$rako $P(y,y)$ formulan)
4. $\forall z\ R(z) \wedge \forall y\ P(y,y)$ — TRUK(1)
5. $\forall z\ R(z)$ — KS(4)
6. $R(y)$ — $\forall z$ ezabatu (5) (y askea $z$rako $R(z)$ formulan)
7. $P(y,y) \wedge\ R(y)$ — KK(3,6)
8. $\forall y\ (P(y,y) \wedge R(y))$ — $\forall y$ sartu (7) (1. premisan y aldagaia ez da aske ageri)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ sartu)

Adibidea.

	1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	
	2. $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg Q(x))$	$/ \therefore \quad \forall x\ (R(x) \rightarrow \neg P(x))$
$\rightarrow$	$\boxed{3.}$ $R(x)$	(BFE) hipotesia $/ \therefore \quad \neg P(x)$
	$\boxed{4.}$ $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$	$\forall x$ ezabatu (2) (x askea $x$rako $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$ formulan)
	$\boxed{5.}$ $\neg Q(x)$	MP(4,3)
	$\boxed{6.}$ $P(x) \rightarrow Q(x)$	$\forall x$ ezabatu (1) (x askea $x$rako $P(x) \rightarrow Q(x)$ formulan)
	$\boxed{7.}$ $\neg P(x)$	MT(6,5)
	$\boxed{8.}$ $R(x) \rightarrow \neg P(x)$	BFE(3-7)
	9. $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg P(x))$	$\forall x$ sartu (8) (1. eta 2. premisetan x ez da aske ageri. 3. hipotesian bai, baina ez dago indarrean)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ sartu)

Adibidea. Erregelaren erabilera okerra.

	1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	$/ \therefore \quad P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$
$\rightarrow$	$\boxed{2.}$ $P(x)$	(BFE) hipotesia $/ \therefore \quad \forall x\ Q(x)$
	$\boxed{3.}$ $P(x) \rightarrow Q(x)$	$\forall x$ ezabatu (1) (x askea $x$rako $P(x) \rightarrow Q(x)$ formulan)
	$\boxed{4.}$ $Q(x)$	MP(3,2)
	$\boxed{5.}$ $\forall x\ Q(x)$	$\forall x$ sartu (4) (Ezin da! 1. premisak ez du $x$ren agerpen askerik, baina 2.ko hipotesiak bai, eta oraindik indarrean dago)

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile existentziala sartzearen erregela ($\exists x$ sartu).
$A(y)$ formula izanik, $\exists x\ A(x)$ ondoriozta dezakegu, beti ere y askea bada x aldagairako $A(x)$ formulan edo y konstantea bada.

- Intuitiboki: Unibertsoko y elementu jakin batentzat egiazkoa den $A(y)$ formula unibertsoko elementuren batentzat egiazkoa dela esaten da erregela aplikatuz.
- Formalki: Unibertsoko elementu jakin bat $y$ren bidez adierazteko: y askea x aldagairako $A(x)$ formulan.

Adibidea.

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$	$/ \therefore \quad P(y) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
$\boxed{2.}$ $P(y)$	(BFE) hipotesia $/ \therefore \quad \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
$\boxed{3.}$ $P(y) \to Q(y)$	$\forall x$ezab.(1) (y aske $x$rako $P(x) \to Q(x)$)
$\boxed{4.}$ $Q(y)$	MP(3,2)
$\boxed{5.}$ $P(y) \wedge Q(y)$	KK(2,4)
$\boxed{6.}$ $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists x$ sar.(5) (y aske $x$rako $P(x) \wedge Q(x)$)
7. $P(y) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	BFE(2,3-6)

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile existentziala ezabatzearen erregela ($\exists x$ ezabatu)
$\exists x\ A(x)$ formulatik zenbatzailea kendu eta $A(y)$ ondorioztatzeko bete beharko da y ez agertzea aske ez premisetan, ez argumentuaren C ondorioan ezta indarrean dauden hipotesietan.

- Intuitiboki: $A(x)$ egiazko egiten duen x elementu hori bereiztu eta y dela $\boxed{\text{suposatzen}}$ dugu erregela aplikatzean. Suposizioak y elementua gainerako guztietatik bereizi behar du, ez dakigulako zein den $A(x)$ betetzen duen hori. Horretarako, beharrezkoa da y elementuak agerpen askerik ez izatea.
- Erregelaren aplikazioa: Baldintzak betetzen badira, $\exists x\ A(x)$ formulatik $A(y)$ suposizioa egingo dugu. Hortik ondorioztatutakoak $A(y)$ suposizioaren mende geratuko dira. Argumentuaren C ondoriora iritsi eta bertan $y$ren agerpen askerik ez dagoela ikusten bada, orduan erregelaren aplikazioa amaituko da, suposizioa ez da indarrean izango aurrerantzean eta C ontzat emango dugu.

Zenbatzaileen erregelak ($\exists x$ ezabatu)

Adibidea.

	1. $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	
	2. $\exists y\ P(y)$	$/ \therefore \quad \exists z\ Q(z)$
$\to$	$\boxed{3.}$ $P(y)$	$\exists y$ ezabatu(2) (suposizioa) (y ez da aske bi premisetan eta ondorioan)
	$\boxed{4.}$ $P(y) \to Q(y)$	$\forall x$ ezabatu(1) (y askea $x$rako $P(x) \to Q(x)$ formulan)
	$\boxed{5.}$ $Q(y)$	MP(4,3)
	$\boxed{6.}$ $\exists z\ Q(z)$	$\exists z$ sartu(5) (y askea $z$rako $Q(z)$ formulan)
	7. $\exists z\ Q(z)$	$\exists y$ ezabatu(2,3-6) erregelaren amaiera (2. premisan ezabatu dugu, 3-6 urratsetan suposizioa indarrean izan da. 6. urratseko ondorioan y ez dagoenez aske, ontzat ematen da)

Zenbatzaileen erregelak ($\exists x$ ezabatu)

Adibidea. Erregelaren erabilera okerra.

	1. $\forall x \exists y\ P(x,y)$	$/ \therefore \quad \forall y \exists x\ P(x,y)$
	2. $\exists y P(x,y)$	$\forall x$ ezabatu(1) (x askea $x$rako $\exists y P(x,y)$ formulan)
$\to$	$\boxed{3.}$ $P(x,y)$	$\exists y$ ezabatu(2) (suposizioa) (y ez da aske ez premisan ez ondorioan)
	$\boxed{4.}$ $\exists x\ P(x,y)$	$\exists x$ sartu(3) (x askea $x$rako $P(x,y)$ formulan)
	$\boxed{5.}$ $\exists x\ P(x,y)$	$\exists y$ ezabatu(2,3-4) erregelaren amaiera (Ezin da erregela amaitutzat eman!! Suposizioko y aske ageri da... Ezin dugu formula ontzat eman)
	6. $\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall y$ sartu(5) (Ezin da! Suposizioa indarrean da, eta y aske ageri da suposizioan)

5. urrats moduan $\forall y$ sartu(4) ere ezingo nuke egin (suposizioa...)

Bibliografia

- Matemáticas Discreta y Combinatoria. Una introducción con aplicaciones. Ralph P. Grimaldi. Addison-Wesley Iberoamericana. Capítulo 2: "Fundamentos de lógica"
- Wikipedia. Lehen mailako logika. https://eu.wikipedia.org/wiki/Lehen_mailako_logika
- Wikiliburua https://en.wikibooks.org/wiki/Formal_Logic/Predicate_Logic