Proposizio-logika. Ariketak

1. Sintaxia proposizio-logikan

1.1 Honako argumentuetako esaldien formalizazioa egin ezazu proposizio-logikarako:

a) Euria egiten duenean etxean geratzen gara. Euria ari du. Hortaz, etxean geratuko gara.

b) $a > 2$ bada, $a^2 > 4$ izango da, eta, $a < -2$ bada, $a^2 > 4$ izango da. Hortaz, $|a| > 2$ denean, $a^2 > 4$ betetzen da.

c) Matematika ikasten duenak azterketa gaindituko du eta azterketa gainditzen duenak badaki integralak kalkulatzen. Hortaz, matematika ikasi duenak badaki integralak kalkulatzen.

d) Donostiara Tolosatik edo Zarauztik joan gaitezke. Tolosako bidea itxita dagoenez, Donostiara bagoaz, Zarauztik joango gara.

e) Jone datorrenean Izaskun ere badator. Eta Ainhoa datorrenean Gaizka ere badator. Bietako bat, Izaskun edo Gaizka, kanpoan da. Hortaz, Jone edo Ainhoa ez da etorriko.

f) Mikelek edo Jonek hil zuten. Mikel herritik kanpo zegoen hilketa gertatu zenean. Mikel herritik kanpo bazegoen hilketa gertatu zenean orduan ez zegoen hilketa gertatutako lekuan. Mikel hilketa gertatutako lekuan ez bazegoen orduan ezin zuen hilketa burutu. Hortaz, Jonek hil zuen.

g) Gogotsu saiatzen banaiz eta gaitasun berezia badut musikari ona izango naiz. Musikari ona banaiz zoriontsua izango naiz. Hortaz, zoriontsua ez banaiz gogotsu saiatu ez naizelako edo gaitasun berezia ez dudalako izango da.

1.2 Honako formuletako lokailuen agerpen bakoitzaren irismena adieraz ezazu.

a) $(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

b) $\neg p \wedge q \leftrightarrow (r \wedge \neg\neg(p \vee q) \rightarrow s)$

c) $p \wedge (p \vee q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$

2. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna. Baliokidetza logikoak

2.1 Izan bitez A eta B formulak eta $I_1 = \{p, q, \neg r\}$ eta $I_2 = \{\neg p, q, \neg r\}$ interpretazioak. Kalkula itzazu $V(A, I_1)$, $V(A, I_2)$, $V(B, I_1)$ eta $V(B, I_2)$ egia-balioak.

$$A = p \vee \neg r \rightarrow r \wedge q, \qquad B = \neg p \vee q \rightarrow (\neg(p \wedge r) \rightarrow \neg p)$$

2.2 Honako formulen egia-taulak eraiki itzazu, eta baliozkotasunari buruz, esan formulak kontsistente/inkontsistente(kontraesan) eta baliozko(tautologia)/baliogabe diren, erabakia arrazoituz.

a) $p \vee \neg q \leftrightarrow s$

b) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \rightarrow \neg(r \wedge p))$

d) $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow r \vee s$

2.3 Formula bakoitzerako 2 interpretazio aurki itzazu, formula egiazko egingo duen bat eta faltsu egingo duen beste bat, horretarako egia-taulak eraiki gabe.

a) $(p \rightarrow q) \vee q$

b) $(p \vee \neg q) \wedge p$

c) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

2.4 Honako formulen baliozkotasuna azter ezazu, kontsistente/inkontsistente(kontraesan) eta baliozko(tautologia)/baliogabe diren erabakiz, egia-taulak eraiki gabe. Zure erantzuna frogatuko duten interpretazioak aurki itzazu.

a) $\neg p \rightarrow q \wedge (q \rightarrow p)$

b) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

c) $p \wedge (p \vee q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$

d) $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$

2.5 Formulen baliozkotasunari buruzko honako baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren erabaki ezazu, erantzuna arrazoituz:

a) $\neg A$ tautologia bada, A ez da tautologia izango.

b) A ez bada tautologia, $\neg A$ tautologia izango da.

c) $A \vee B$ tautologia bada, A tautologia da edo B tautologia da.

d) A tautologia bada edo B tautologia bada, $A \vee B$ tautologia izango da.

e) $A \wedge B$ tautologia da baldin eta soilik baldin A eta B tautologiak badira.

2.6 Formulak baliokideak direla froga ezazu 10 baliokidetza logikoak erabiliz.

a) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge (p \vee r)$

b) $\neg(\neg p \vee \neg(r \vee s)) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$

c) $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge s)$

d) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$

e) $p \wedge q \rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r)$

2.7 Egia-taulak eraikiz edo baliokidetza logikoak erabiliz, honakoak egiazko edo faltsu diren erabaki ezazu.

a) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow q \wedge r$

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q \equiv (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

c) $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$

d) $(p \wedge q) \vee r \equiv p \wedge (q \vee r)$

3. Ondorio logikoak. Argumentuen dedukzio formala

3.1 Erabaki ezazu beheko ondorio logikoak egiazkoak ala faltsuak diren. Horretarako, emandako formulen egia-taula eraiki eta zure erabakia arrazona ezazu.

a) q formula $p \wedge q$ formularen ondorio logikoa da.
b) q formula $p \vee q$ formularen ondorio logikoa da.
c) q formula $p \vee q$ eta $\neg p$ formulen ondorio logikoa da.
d) p formula $p \vee q$ eta q formulen ondorio logikoa da.

3.2 Honako argumentuen baliozkotasuna azter ezazu baliokidetasun logikoak erabiliz. Baliozko direla frogatzeko, $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ tautologia dela edo $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg C$ inkontsistentzia dela frogatu beharko duzu. Baliogabea dela ikusten baduzu, argumentua faltsu egiten duen interpretazio bat aurki ezazu (ez eraiki egia-taularik).

a) $p \to q \quad / \therefore \neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p)$
b) $p \to q \quad / \therefore (p \to \neg r) \to \neg p$
c) $(p \wedge q) \to r \quad / \therefore (p \to (q \to r))$

3.3 Honako argumentuen baliozkotasuna azter ezazu (baliozkoak/baliogabeak), egia-taulak eraiki gabe. Zure erantzuna frogatuko duten interpretazioak aurkitu.

a) $a \to d$
$d \to c$
$a \quad / \therefore d \wedge c$

b) $a \to b$
$c \to d$
$b \vee c \quad / \therefore a \vee d$

c) $p \to \neg q$
$p \vee r$
$\neg r \quad / \therefore q$

d) $\neg p \vee q$
$r \to s$
$q \vee r \quad / \therefore p \vee s$

3.4 Honako argumentuen baliozkotasunaren froga formalak egin itzazu, 9 inferentzia-erregelak soilik erabiliz.

a) $h \to (i \to j)$
$k \to (i \to j)$
$\neg h \wedge \neg k \to \neg l \vee \neg m$
$(\neg l \to \neg n) \wedge (\neg m \to \neg o)$
$(p \to n) \wedge (q \to o)$
$\neg(i \to j) \quad / \therefore \neg p \vee \neg q$

b) $\neg b \to (d \leftrightarrow \neg h)$
$(d \to e) \to f$
$e \wedge a \to \neg b$
$\neg f \vee \neg(d \leftrightarrow \neg h)$
$c \to (d \to e) \quad / \therefore \neg c \vee \neg(e \wedge a)$

c) $(p \to \neg q) \wedge (\neg r \to s)$
$(t \to u) \wedge (\neg v \to \neg x)$
$(\neg q \to t) \wedge (s \to \neg v)$
$u \vee \neg x \to y \wedge z$
$p \vee \neg r \quad / \therefore y \wedge z$

3.5 Argumentuen baliozkotasunaren froga formala egin ezazu 9 inferentzia-erregelak eta ordezkapen-erregela (10 baliokidetza logikoak) soilik erabiliz.

a) $\neg(p \to q)$
$r \to q$
$p \to s \quad / \therefore s \wedge \neg r$

b) $\neg p \vee q$
$r \wedge s \to p$
$\neg q \wedge s \ / \therefore \neg r$

c) $\neg q \wedge s$
$s \to \neg r$
$\neg r \to \neg p \vee q \quad / \therefore \neg p$

d) $p \to r$
$s \wedge \neg r$
$\neg q \wedge s \to p \quad / \therefore q$

3.6 Dedukzio formala erabiliz, argumentuen baliozkotasunaren froga formala egin ezazu. Horretarako 9 inferentzia-erregelak, ordezkapen-erregela (10 baliokidetza logikoak), absurdura eramatearen erregela (AEE) eta baldintzazko frogaren erregela (BFE) erabil ditzakezu. Froga modu bat baino gehiagotan egin.

a) $p \wedge (q \vee r) \to q \wedge r \ / \therefore p \to (q \to r)$

b) $a \ / \therefore b \vee (b \to c)$

c) $d \vee e \to (f \to g)$
$\neg g \vee h \to d \wedge f \quad / \therefore g$

d) $s \to \neg r$
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \ / \therefore q \vee \neg s$

e) $o \to (p \to q)$
$p \to (q \to r) \quad / \therefore o \to (p \to r)$

f) $p \vee q \to (r \wedge s)$
$\neg(\neg p \vee \neg r)$
$\neg t \to \neg(p \wedge s) \quad / \therefore t$

g) $p \wedge s$
$\neg r \to \neg p \vee q$
$p \vee r \to s \wedge \neg q \quad / \therefore r$

h) $(h \to i) \wedge (j \to k)$
$(i \vee k) \to l$
$\neg l \quad / \therefore \neg(h \vee j)$

i) $p \to \neg q$
$\neg r \wedge s \to p$
$s \wedge q \quad / \therefore r$

j) $a \wedge b \to c$
$c \to d$
$b \wedge \neg d \quad / \therefore \neg a$

k) $x \to (y \to z)$
$x \to (a \to b)$
$x \wedge (y \vee a)$
$\neg z \quad / \therefore b$

l) $(v \to \neg w) \wedge (x \to y)$
$(\neg w \to z) \wedge (y \to \neg a)$
$(z \to \neg b) \wedge (\neg a \to c)$
$v \wedge x \quad / \therefore \neg b \wedge c$

m) $(l \vee m) \vee (n \wedge o)$
$(\neg l \wedge o) \wedge \neg(\neg l \wedge m) \ / \therefore \neg l \wedge n$