# *Proposizio-Logika*

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Informatika fakultatea
Donostia



## *Aurkibidea*





## *Sarrera*

Hizkuntza bat erabiltzean, ezagutza bi modutara lor daiteke: esaldi deklaratzaileek zuzenean emanda edo logika erabiliz.

- Logikaren helburua: dedukzioa, hau da, ezaguna den informaziotik abiatuz (premisak) informazio berria lortzea (ondorioa).
- Logika formala: arrazonamenduen forman oinarrituz (ez edukian), arrazonamenduen baliozkotasuna aztertzen duen zientzia.
- Baliozko arrazonamendua. Premisak egiazko izanik ondorioa ere egiazkoa bada, orduan arrazonamendua baliozkoa da. Ez da onartzen premisak egiazko izanik ondorioa faltsu izatea (premisen edukia egiazko edo faltsu izateak ez du arrazonamenduaren baliozkotasuna baldintzatzen).



## *Sarrera. Logika formala*

Esaldiak formalizatzea: esaldiaren forma sinboloen bidez adieraztea. Analisiaren konplexutasunaren arabera, bi formalizazio maila:

- Proposizio-logika: Formalizaziorako oinarrizko elementuak esaldi deklaratzaile bakunak (proposizioak) dira.
- Predikatu-logika: Formalizazioan terminoak eta predikatuak erabiltzen dira.

Logikaren dedukzio-egitura zuzenak adierazteko:

- Interpretazioak: Proposizioen esanahiak definitu (egiazko/faltsu) eta esanahi horietan oinarrituz dedukzio-egitura zuzenak definitu.
- Dedukzio edo froga formala: Dedukzio-egitura zuzenak definitu, eta horietatik abiatuz dedukzio-egitura zuzen berriak lortzeko erregelak definitu.

## *Esaldien formalizazioa*

Proposizio-logikan esaldien formalizaziorako proposizio atomikoak eta lokailuak erabiltzen dira.

- Proposizio atomikoa: Lengoaiaren oinarrizko elementu moduan esaldi edo enuntziatu bakuna hartzen da. Bere esanahia egiazkoa edo faltsua den esatea posible izan behar du. Erabiltzen diren sinboloak: $p, q, r, s, \ldots$
- Lokailua: Lengoaiaren lokailuak erabiliz, esaldi konposatuak sor daitezke esaldi bakunetatik. Sinboloak hierarkia-mailaka:
  - Ukapena, $\neg$, (1.maila): ez, ez da egia, gezurra da...
  - Konjuntzioa, $\wedge$, (2.maila): eta, baina, hala ere...
  - Disjuntzioa, $\vee$, (2.maila): edo (ez edo esklusiboa)
  - Baldintzazkoa, $\rightarrow$, (3.maila): baldin...orduan, ... baldin...
  - Baldintzabikoa, $\leftrightarrow$, (3.maila): beharrezkoa eta nahikoa, baldin eta soilik baldin...



## *Sintaxia. Ondo eratutako formula*

Esaldi konposatuen adierazpena sinboloak konbinatuz lortzen da.

- Sintaxia: Sintaxiak sinboloen arteko erlazioak aztertzen ditu, ondo eratutako sinbolo-segidak sortzeko eta identifikatzeko.
- Alfabetoa: Alfabetoa honako sinboloek osatzen dute:
  - Proposizio atomikoak (atomoak): $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, \ldots\}$
  - Lokailuak: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - Parentesiak: $\{(,)\}$

  Hortaz, alfabetoa:

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{(,)\}$$

- Formula: Formula bat $\mathcal{A}$ alfabetoko elementuz eratutako segida finitu bat da.



## *Sintaxia. Ondo eratutako formula*

Sinbolo-segidak ondo eratuta badaude, ondo eratutako formulak eta azpiformulak izango ditugu.

- Ondo eratutako formula: Proposizio-logikan ondo eratutako formula honako hiru erregelak erabiliz eratzen da:
  1. Atomoak ondo eratutako formulak dira
  2. $A$ eta $B$ ondo eratutako formulak badira, $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ere ondo eratutako formulak dira.
  3. Ondo eratutako formulak sortzeko modu bakarra aurreko bi erregelak aldi kopuru finituan aplikatzea da.
- Azpiformula: Ondo eratutako $G$ formula emanik, $A$ $G$ren azpiformula dela esango dugu $A$ osatzen duten sinboloak ondoz-ondokoak badira $G$n eta ondo eratutako formula bat osatzen badute.
- Irismena: Lokailu baten agerpen batek formularen zein azpiformulari eragiten dion adierazten du, norainokoa den haren eragina. Nahasteko arriskurik ez dagoenean, parentesiak ken daitezke formulatik.



## *Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna*

Logikaren dedukzio-egitura zuzenak adierazteko modu bat interpretazioak erabiltzea da.

- Proposizio atomikoa: Enuntziatu bakuna adierazten du: $p$.
- Proposizioaren egia-balioa: Proposizioaren esanahia egiazkoa edo faltsua den esatea posible izan behar du. Egia-balioak bere egiazkotasuna edo faltsutasuna adierazten du: E (egiazkoa), F (faltsua).
- Interpretazioa: Formula batean $p_1, \ldots, p_n$ proposizioak agertzen badira, $p_i \neq p_j, i \neq j$, $p_i$ proposizio bakoitzari E edo F egia-balioa esleituz, formularako $I = \{m_1, \ldots, m_n\}$ interpretazioa lortzen da, $m_i = p_i$ bada $p_i$ proposizioari $E$ esleitu zaiola esan nahi du, eta $m_i = \neg p_i$ bada aldiz, $F$. $n$ atomo eta 2 egia-balio izanik, formulak $2^n$ interpretazio ditu.

Oharra: Hemendik aurrera formula aipatzean ondo eratutako formula bati buruz ari garela ulertuko da.

## Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

Interpretazioen bidez formulen baliozkotasuna azter daiteke.

- Formularen egia-balioa interpretazio baterako, $V(G, I)$: $G$ formula bat eta $I$ interpretazio bat izanik, formularen $V(G, I)$ egia-balioa $I$ interpretaziorako honako 5 erregelen bidez (lokailu bakoitzeko bat) kalkulatzen da. $A$ eta $B$ ondo eratutako formulak izanik,

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \to B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $F$ | $E$ | $E$ | $E$ | $E$ |
| $E$ | $F$ | $F$ | $F$ | $E$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $E$ | $E$ | $F$ | $E$ | $E$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $E$ | $F$ | $F$ | $E$ | $E$ |

$V(G, I) = E$ bada $G$ formula $I$ interpretaziorako egiazkoa dela esango dugu (edo $I$ interpretazioak $G$ betetzen duela), eta $I \models G$ notazioaz adieraziko dugu. $V(G, I) = F$ bada $G$ formula $I$ interpretaziorako faltsua dela esango dugu.



## Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

Formula bat ez da berez egiazko edo faltsu; interpretazio baterako izango da $V(G, I) = E$ edo $V(G, I) = F$.

- Formularen egia-taula: $G$ formula baten $V(G, I)$ egia-balio guztiak (interpretazio guztietarako) erakusten dituen taula da.

$G$ formularen egia-taula aztertuz, zera esan dezakegu:

- Kontsistente/inkontsistente (kontraesana): $G$ formula kontsistentea da formula egiazko egiten duen interpretazio bat existitzen bada gutxienez. Bestela, interpretazio guztietarako formula faltsua bada, formula inkontsistente (kontraesana) da.
- Baliozkoa (tautologia)/baliogabea: $G$ formula baliozkoa (tautologia) da interpretazio guztietarako formula egiazkoa bada. Bestela, gutxienez interpretazio bat existitzen bada $G$ formula faltsu egiten duena, $G$ formula baliogabea da.



## Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

$G$ formularen egia-taula aztertuz, zera esan dezakegu:

- Baliozkoa (tautologia) eta kontsistentea: $G$ formula $V(G, I) = E$ da $I$ interpretazio guztietarako.
- Kontsistentea eta baliogabea: $G$ formula $V(G, I) = E$ da interpretazio batzuetarako eta $V(G, I) = F$ beste batzuetarako.
- Inkontsistentea (kontraesana) eta baliogabea: $G$ formula $V(G, I) = F$ da $I$ interpretazio guztietarako.

Zera betetzen da:

- $G$ tautologia baldin eta soilik baldin $\neg G$ inkontsistentea.
- $G$ inkontsistentea baldin eta soilik baldin $\neg G$ tautologia.
- $G$ tautologia bada, $G$ kontsistentea da.
- $G$ inkontsistentea bada, $G$ baliogabea da.



## Semantika. Baliokidetza logikoak

Izan bitez $A$ eta $B$ formulak eta beren egia-taulak.

- Baliokidetza logikoak: $A$ eta $B$ formulak logikoki baliokideak dira $I$ interpretazio guztietarako $V(A, I) = V(B, I)$ bada, hau da, formulen egia-taulak berdinak badira. Baliokidetza logikoa $A \equiv B$ notazioaz adieraziko dugu.

Badira oso ezagunak diren baliokidetza logiko batzuk.

- Elkartze-legeak (ELKAR):

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

- Trukatze-legeak (TRUK):

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \qquad A \vee B \equiv B \vee A$$

## Semantika. Baliokidetza logikoak

- Banatze-legeak (BANA):

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- Tautologiak (TAUT):

$$A \wedge A \equiv A, \qquad A \vee A \equiv A$$

- Ukapen Bikoitza (UB):

$$\neg\neg A \equiv A$$

- De Morganen legeak (DeM):

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$



## Semantika. Baliokidetza logikoak

- Transposizioa (TRANS):

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

- Inplikazio materiala (INP):

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

- Baliokidetza materiala (BALIO):

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

- Esportazioa (ESP):

$$(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$$



## Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

Ondorio logikoa, $(A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B)$
$A_1, \ldots, A_n$ eta $B$ formulak izanik, $B$ formula $A_1, \ldots, A_n$ formulen ondorio logikoa da edo formuletatik logikoki deduzitzen da ($A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ notazioaz adieraziko da) baldin,

$$V(A_1, I) = \ldots = V(A_n, I) = E \quad \Longrightarrow \quad V(B, I) = E,$$

hau da

$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ formula inkontsistentea bada.



## Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

*Definizioa (Argumentua)*
$P_1, \ldots, P_n, C$ formula multzo bat argumentu bat da. $P_1, \ldots, P_n$ formulak premisak direla esaten da eta $C$ ondorioa.

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \ / \ \therefore C \end{array}$$

*Definizioa (Baliozko argumentua, ondo eraikitako argumentua)*
Argumentu bat baliozkoa da ondorioa premisen ondorio logikoa bada (premisetatik logikoki deduzitzen bada, ezinezkoa bada premisak egiazko eta ondorioa faltsu izatea).

$$P_1, \ldots, P_n \Rightarrow C.$$

Baliozkoa ez den argumentua baliogabea edo gaizki eraikitakoa da.

## *Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak*

Oso ezagunak eta erabilgarriak diren 9 baliozko argumentu:

- Modus Ponens (MP) $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

- Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

- Silogismo Hipotetikoa (SH)

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline A \to C \end{array}$$



## *Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak*

- Silogismo Disjuntiboa (SD)

$$\begin{array}{l} A \lor B \\ \neg A \\ \hline B \end{array}$$

- Dilema Eraikitzailea (DE)

$$\begin{array}{l} (A \to B) \land (C \to D) \\ A \lor C \\ \hline B \lor D \end{array}$$

- Dilema Suntsitzailea (DS)

$$\begin{array}{l} (A \to B) \land (C \to D) \\ \neg B \lor \neg D \\ \hline \neg A \lor \neg C \end{array}$$



## *Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak*

- Konjuntzioaren Sinplifikazioa (KS)

$$\begin{array}{l} A \land B \\ \hline A \end{array}$$

- Konjuntzioaren Konbinazioa (KK)

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline A \land B \end{array}$$

- Disjuntzioaren Batuketa (DB)

$$\begin{array}{l} A \\ \hline A \lor B \end{array}$$



## *Semantika. Dedukzio edo froga formala*

Argumentuetan proposizio eta premisa asko daudenean, argumentuaren baliozkotasuna egia-taulen bidez frogatzea (interpretazioetan oinarrituz) oso astuna egiten da.

- Inferentzia-erregelak: Baliozkoak diren argumentu batzuk dira, erregela moduan erabiltzen direnak konplexuagoak diren beste argumentu batzuren baliozkotasuna frogatzeko.

Erabiliko ditugun inferentzia-erregelak:

1. Modus Ponens(MP)
2. Modus Tollens(MT)
3. Silogismo Hipotetikoa(SH)
4. Silogismo Disjuntiboa(SD)
5. Dilema Eraikitzailea(DE)
6. Dilema Suntsitzailea(DS)
7. Konjuntzioaren Sinplif.(KS)
8. Konjuntzioaren Konbin.(KK)
9. Disjuntzioaren Batuketa(DB)

## Semantika. Dedukzio edo froga formala

*Definizioa (Baliozkotasunaren froga formala)*

$P_1, \ldots, P_n \;/\; \therefore C$ argumentuaren baliozkotasunaren froga formal bat formula segida finitu bat da, $S_1, \ldots, S_m$, non:

1. azken formula argumentuaren ondorioa den, $S_m = C$.
2. $S_i$ premisa bat den edo aurreko formuletatik inferentzia-erregelen bidez deduzitutako formula bat den, $i = 1, \ldots, m$

Interpretazio jakin baterako $P_1, \ldots, P_n$ premisak egiazkoak direla suposatzen badugu, haietatik abiatuz eta inferentzia erregelak aplikatuz lortutako $S_1, \ldots, S_m$ formulak ere egiazkoak izango dira interpretazio horretarako.
Hortaz, $S_m = C$ ere egiazkoa izango da interpretazio horretarako.



## Dedukzio edo froga formala. Ordezkapen-erregela

Baliozkoak diren hainbat argumenturen baliozkotasuna 9 inferentzia-erregelak soilik erabiliz frogatzea ez da posible izaten.

*Definizioa (Ordezkapen-erregela)*

Izan bitez $A$ formula bat, $A$ren azpiformula bat den $B$ eta logikoki baliokidea den $B' \equiv B$ beste formula bat. $A$ formulan $B$ azpiformula $B'$ azpiformulaz ordezkatuz lortzen den $A'$ formula $A$ formularen dedukzioa da ($A$tik ondorioztatzen da).

$A' \equiv A$ betetzen da, beren egia-taulak berdinak direlako.

- Ordezkapen-erregelari esker, formula baten baliozkotasunaren froga formala egitean 9 inferentzia-erregelez gain 10 baliokidetza logikoak erabil ditzakegu.
- Inferentzia-erregelak formula osoari aplikatzen zaizkio. Ordezkapen-erregelaren bidez baliokidetza logikoak, aldiz, formula osoari edo azpiformula bati aplikatuko zaio.



## Dedukzio edo froga formala. Baldintzazko frogaren eta Absurdora eramatearen erregelak

- Argumentu baten baliozkotasuna frogatzean $P \rightarrow C$ itxurako baldintzazko formula bat deduzitu nahi denean baldintzazko frogaren erregela (BFE) erabil daiteke.

*Definizioa (Baldintzazko frogaren erregela (BFE))*

$P_1, \ldots, P_n \;/\; \therefore P \rightarrow C$ argumentua baliozkoa da baldin eta soilik baldin $P_1, \ldots, P_n, P \;/\; \therefore C$ argumentua baliozkoa bada.

Argumentu berria: premisak $P_1, \ldots, P_n, P$ eta ondorioa $C$.

- Absurdura eramatearen erregela (AEE) aplikatzean, frogatu nahi denaren kontrakoa suposatzen da, kontraesan bat deduzitzeko.

*Definizioa (Absurdura eramatearen erregela (AEE))*

$P_1, \ldots, P_n \;/\; \therefore C$ argumentua baliozkoa da baldin eta soilik baldin $P_1, \ldots, P_n, \neg C \;/\; \therefore \Box$ argumentua baliozkoa bada, $\Box$ formula inkontsistentea (kontraesana) izanik.



## Bibliografia


- Lur Entziklopedia Tematikoa. Gai Unibertsalak, Matematika, Logika formala. https://www.euskadi.eus
- Matemáticas Discreta y Combinatoria. Una introducción con aplicaciones. Ralph P. Grimaldi. Addison-Wesley Iberoamericana. Capítulo 2: "Fundamentos de lógica"
- Wikipedia.
  - Logika. https://eu.wikipedia.org/wiki/Logika
  - Logika proposizional. https://eu.wikipedia.org/wiki/Logika_proposizional
  - Logic in computer science, Logic applications for computers. http://en.wikipedia.org/wiki/Logic_in_computer_science
- Wikiliburuak
  - https://en.wikibooks.org/wiki/Formal_Logic/Sentential_Logic
  - https://en.wikibooks.org/wiki/Logic_for_Computer_Science