

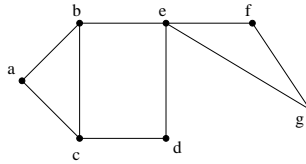
GRAFOAK

1. Definizioak. Graduak. Ibilaldiak.

- 1.1. Gizon batek ibaia zeharkatu behar du ezkerreko aldetik eskuinekora txalupa batez, eta berarekin eraman behar ditu otso bat, ardi bat eta zaku aza. Txalupan gizona eta beste objektu batentzat bakarrik dago lekua (otsoa edo ardia edo zaku aza). Gainera gizonak ezin du utzi ardia bakarrik otsoarekin, ezta ere zaku aza ardiarekin. Nola zeharkatuko du ibaia? Eraiki grafo ez zuzendua non erpinek adieraziko duten eman daitezkeen konfigurazio guztiak: gizona eta hiru objektuak ezkerrean eta eskuinean ezer ez, gizona, otsoa eta ardia ezkerrean eta zaku aza eskuinean, etab. Bi erpinen artean ertza ipiniko dugu baldin konfigurazio batetik bestera igaro badaiteke txalupaz ibaia behin zeharkatuz. Determinatu gizonak bere objektuekin ibaia zeharkatzeko era desberdinak.
- 1.2. Baldin G begizta gabeko grafo ez zuzenduan v erpin eta e ertz baditugu, frogatu $2e \leq v^2 - v$ betetzen dela.
- 1.3. Deduzitu grafo edo multigrafo hauen erpin kopurua.
 - (a) G -k bederatzi ertz ditu eta erpin guztiak 3 graduakoak dira.
 - (b) G erregularra da eta 15 ertzekoa.
 - (c) G -k 10 ertz ditu, bi erpin 4 graduakoak eta beste guztiak 3 graduakoak.
- 1.4. Izan bedi G grafo ez zuzendua. Zein da erpin kopururako litekeen balio handiena baldin 19 ertz baditugu eta erpin bakoitzaren gradua gutxienez 4 bada?
- 1.5. Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua eta 3-erregularra. Baldin $|E| = 2|V| - 6$, kalkulatu $|V|$ eta $|E|$.
- 1.6. Izan bedi G grafo ez zuzendua, n erpin eta e ertz dituen, δ izanik grafoko erpinen graduetatik txikiena eta Δ handiena. Frogatu $\delta \leq 2e/n \leq \Delta$ betetzen dela.
- 1.7. Frogatu grafo 3-erregular orok erpin kopuru bikoitia duela.

1.8 Irudiko grafoan definitu

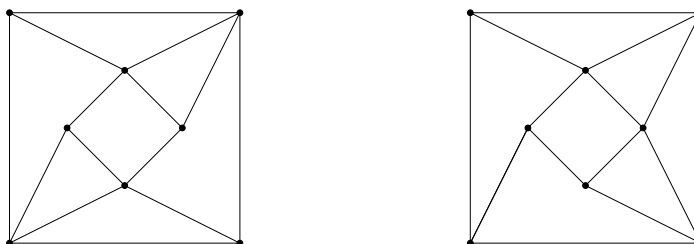
- (a) b -tik d -rako ibilaldi bat katea ez dena.
- (b) $b - d$ kate bat bidea ez dena.
- (c) b -tik d -rako bide bat.
- (d) b -tik b -rako ibilaldi itxi bat zirkuitua ez dena.
- (e) b -tik b -rako zirkuitu bat zikloa ez dena.
- (f) b -tik b -rako ziklo bat.



2. Azpigrafoak. Osagarria. Isomorfismoak.

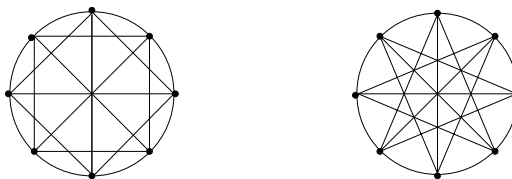
- 2.1. Izan bedi G begizta gabeko grafo konektatu ez zuzendua eta $\{a, b\}$ bere ertz bat. Frogatu $\{a, b\}$ ertza ziklo baten zatia dela baldin eta soilik baldin ertz hau kenduz (baina ez a eta b erpinak) grafoak konektatuta jarraitzen badu.
- 2.2. Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, 10 erpinekoa, non $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 5$, $d(v_5) = 1$, $d(v_6) = 2$, $d(v_7) = 5$, $d(v_8) = 2$, $d(v_9) = 3$, $d(v_{10}) = 2$. Kalkulatu erpinen gradua grafo osagarrian.
- 2.3. Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, v erpin eta e ertz dituen. Zenbat ertz ditugu \overline{G} grafoan?
- 2.4. Frogatu kuboa grafo zatibikoa dela.
- 2.5. Izan bedi G , n erpineko zikloa. Frogatu G eta \overline{G} isomorfoak direla baldin eta soilik baldin $n = 5$.
- 2.6. Honela definitzen da W_n grafoa, $n \geq 3$ erradioko gurpila: n luzerako zikloa dugu eta gainera beste erpin bat zikloko n erpinei albokoa dena. Badago grafo osatu bati isomorfoa den W_n graforik?

2.7. Irudiko bi grafoentzat kalkulatu erpin bakoitzaren gradua. Isomorfoak dira?



2.8. (a) G_1 eta G_2 begizta gabeko grafo ez zuzenduak izanik, frogatu G_1 eta G_2 isomorfoak direla baldin eta soilik baldin $\overline{G_1}$ eta $\overline{G_2}$ isomorfoak badira.

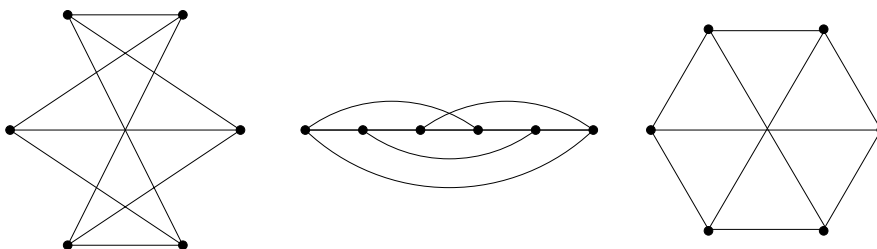
(b) Aztertu irudiko grafoak isomorfoak diren.



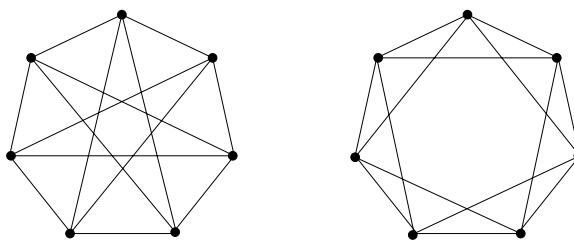
2.9. (a) Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, n erpinekoa. Baldin G eta \overline{G} isomorfoak badira, zenbat ertz ditu G grafoak?

(b) Aurkitu lau eta bost erpinerako adibideak.

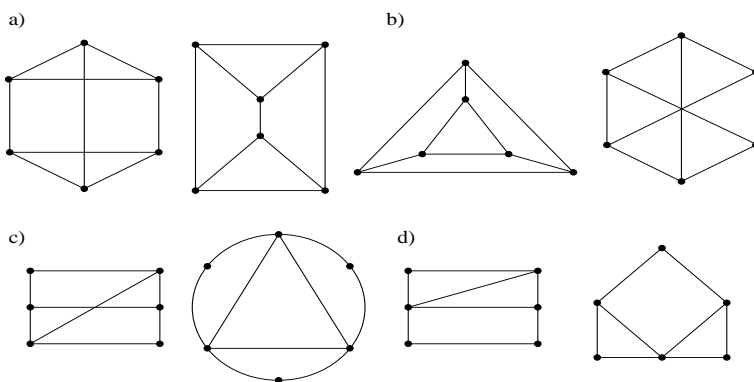
2.10 Frogatu hiru grafo hauek isomorfoak direla.



2.11. Frogatu isomorfoak direla.

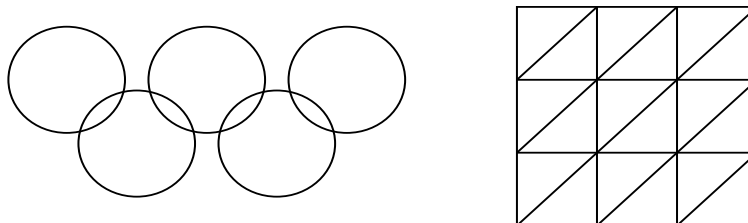


2.12. Grafo hauek binaka hartuz (lau bikote), aztertu isomorfoak diren edo ez.



3. Grafo Eulertar eta Hamiltondarrak.

3.1. Datozen bi grafoetarako esan ea zirkuitu edo kate eulertarrik duten.



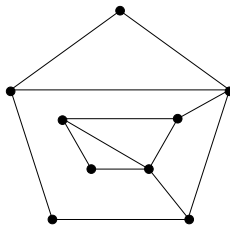
3.2. Aztertu n -ren zein baliotarako K_n -k duen zirkuitu eulertarra. Zein baliotarako du kate eulertarra baina ez zirkuitu eulertarra?

3.3. Dominoko honako 10 piezak ditugu:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$$

Posible al da pieza guztiak errenkada itxi bat osatuz jartzea? Hala bada, eman ezazu piezen kokapena.

- 3.4. (a) Irudiko grafoan aurkitu bi kate (ireki), disjuntuak eta grafoko ertz guztiak hartzen dituztenak.

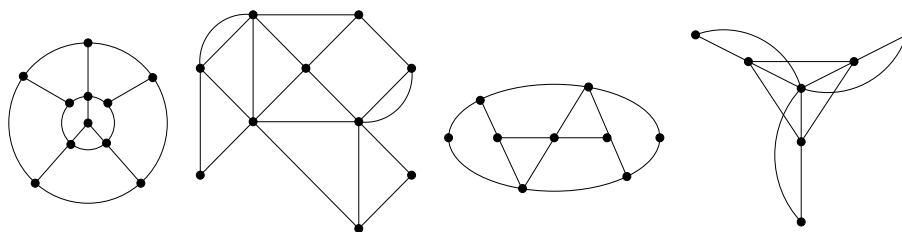


- (b) Izan bedi G grafo konektatua, k erpin gradu bakoitikoak dituena. Frogatu existitzen direla $k/2$ kate (ireki), disjuntuak eta ertz guztiak hartzen dituztenak.
- (c) Izan bedi G grafo konektatua, k erpin gradu bakoitikoak dituena. Zenbat ertz gehitu behar dizkiogu, gutxienez, zirkuitu eulertarra izan dezan? Nola erantsiko dizkiogu ertz hauek?
- 3.5. Mugi dezakegu zaldia xake-taulan, honek urrats batean egin ditzakeen mugimendu guztiak, bakoitza behin, burutuz? Xake-taulak 8×8 lauki ditu, eta bestalde bi laukiren arteko mugimendua osatutzat emango dugu zaldiak urratsa noranzko batean edo bestean ematean. Egin gauza bera alfilarentzat eta dorrearentzat.

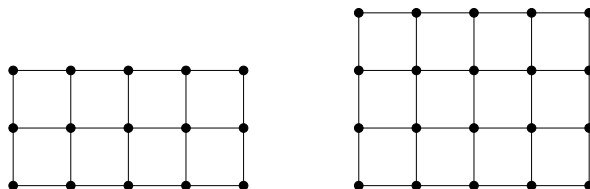
- 3.6. Grafo konektatuen adibideak eman non:

- (a) Ez dago zirkuitu eulertarririk eta ziklo hamiltondarrik ere ez.
 (b) Zirkuitu eulertarra dago baina ez ziklo hamiltondarrik.
 (c) Ziklo hamiltondarra dago baina ez zirkuitu eulertarririk.
 (d) Ziklo hamiltondarra eta zirkuitu eulertarra daude.

- 3.7. Irudiko grafoetan bilatu ziklo hamiltondarra. Ez badago bilatu bide hamiltondarra.



3.8. (a) Grafo hauek badute ziklo hamiltondarrik?



(b) Izan bedi grafo bat p lerro eta q zutabeko sarea. Frogatu ziklo hamiltondarra duela baldin eta soilik baldin p edo q bikoitia bada.

3.9. (a) Marraztu begizta gabeko grafo bat, n erpinduna, bide hamiltondarra duena baina $d(x) + d(y) < n - 1$ izanik edozein bi erpintarako.

(b) Marraztu begizta gabeko grafo bat ziklo hamiltondarra duena baina $d(x) + d(y) < n$ izanik albokoak ez diren erpin pare guzti-etarako.

3.10. Hamabi gonbidatu datoz afaltzera. Hauetako bakoitza gutxienez beste seirekin elkar ezaguna da. Mahai baten inguruan eser daitezke baldin gonbidatu bakoitzaren bi aldeetan honen ezagunak egon behar badira?

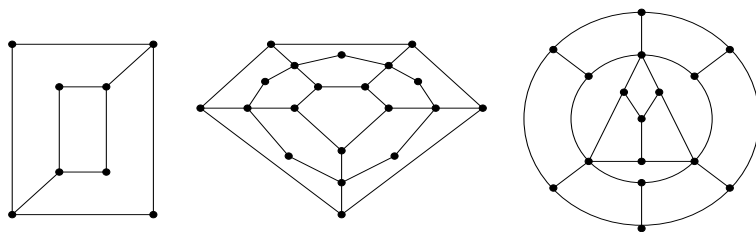
3.11. Hamaika ikasle afaltzera aterako dira egun batzutan. Mahaiaren inguruan eseriko dira eta afari bakoitzean ikasle bakoitzak mahaikide desberdinak izan behar ditu ondoan. Zenbat egunetan egin daiteke hau? Idatzi aukera denak.

3.12. Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, 6-erregularra eta 11 erpinekoa. Frogatu baduela ziklo hamiltondarra.

3.13. Izan bedi G begizta gabeko grafo ez zuzendua, k -erregularra eta $|V| \geq 2k + 2$ izanik. Frogatu grafo osagarriak ziklo hamiltondarra duela.

3.14. Izan bedi C_n ziklo ez zuzendua, $n \geq 5$ erpinekoa. Frogatu grafo osagarriak ziklo hamiltondarra duela.

3.15. Frogatu grafo hauek ez dutela ziklo hamiltondarrik.



- 3.16 (a) Izan bedi $K_{m,n}$ zatibiko grafo osatua, dagokion erpin partizioa $\{V_1, V_2\}$ izanik. (i) Zein da V_1 -eko erpinen gradua eta V_2 -ko erpinena? (ii) Noiz du grafoak zirkuitu eulertarra m eta n erpin kopuruaren arabera? (iii) Noiz du grafoak ziklo hamiltondarra m eta n -ren arabera?
- (b) Izan bedi $K_{m,n}$ zatibiko grafo osatua, 16 ertz dituen. Aurkitu m eta n erpin kopuruak, $m \leq n$, bi kasu hauetan: (i) grafoak zirkuitu eulertarra eta ziklo hamiltondarra du, (ii) grafoak zirkuitu eulertarra du baina ez ziklo hamiltondarra.