

Grafoak

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Informatika fakultatea
Donostia

GRAFOAK

1. Grafoak

- 1.1. Sarrera.
- 1.2. Definizioak.
- 1.3. Erpinen graduak.
- 1.4. Ibilaldiak grafoetan.
- 1.5. Grafoei lotutako matrizeak.
- 1.6. Azpigrafoak, grafo osagarria.
- 1.7. Grafo isomorfismoa.
- 1.8. Kate eta zirkuitu eulertarrak.
- 1.9. Bide eta ziklo hamiltondarrak.

1.1. Sarrera

Grafo teoriaren sorrera: 1736. Euler.
Königsberg-eko zazpi zubien problema:
7 zubiren bidez komunikatutako 4 zonalde.
Zubi bakoitzetik behin pasata hasierako puntura itzuli.

Helburua: Elkarren artean erlazionatuta dauden objektu kopuru finitua duten egoerak eredutzea.

Aplikazioak informatikan: sareen diseinua, zirkuitu integratuen diseinua, etab.

1.2 Definizioak

Grafo zuzendua: $G = (V, E)$ bikotea, non

- V multzo finitu ez hutsa **erpin multzoa** den.
- $E \subseteq V \times V$ **ertz multzoa** den (erpin bikote ordenatuak).

(a, b) ertza emanik:

- ertza a eta b erpinekin **intzidentea**.
- a eta b erpinak **albokoak** dira.
- a erpina ertzaren **jatorria** da.
- b erpina ertzaren **amaiera** da.
- Baldin $a = b$ orduan (a, a) **begizta** da.

Erpin bakartua: ertz intzidenterik ez duena.

Definizioak

Grafo ez zuzendua: ertzak erpin bikote ez ordenatuak dira. Ertzen noranzkoa ez da kontuan hartzen, $(a, b) \in E \Rightarrow (b, a) \in E$.

Ertz ez zuzendua: $\{a, b\} = \{(a, b), (b, a)\}$.

Begizta: $\{a, a\} = (a, a)$

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo zuzendua, **dagokion grafo ez zuzendua:** ertzen norantza kontuan hartu gabe G -tik lortutako grafoa (ertz bakoitza behin bakarrik).

$G = (V, E)$ **multigrafo:** existitzen badira $a, b \in V$, $a \neq b$ bi erpin, beren artean ertz bat baino gehiago dutelarik.

Anizkoiztasuna: (a, b) ($\{a, b\}$) moduko ertz kopurua.

k-grafoa: k anizkoiztasuna baino handiagoa duen ertzik ez dago. Kontrakorik esaten ez bada, grafoa sinplea da, ez multigrafoa.

5

1.3. Erpinen graduak

- $G = (V, E)$ grafo zuzendua eta $a \in V$ erpina.

a -ren **graduerdia:**

$d^+(a) = \#\{b \mid (a, b) \in E\}$: jatorria a -n (irteera gr.).

$d^-(a) = \#\{b \mid (b, a) \in E\}$: amaiera a -n (sarrera gr.).

a -ren **gradua:** $d(a) = d^+(a) + d^-(a)$.

- $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua eta $a \in V$ erpina.
 a erpinaren **gradua:** $d(a) = a$ -rekin intzidentek diren ertzen kopurua. (Erpinean $\{a, a\}$ begizta badago, bi ertz intzidentetzat hartuko ditugu). a erpina **zintzilikatua:** $d(a) = 1$. a erpina **bakartua:** $d(a) = 0$.

6

Erpinen graduak

Teorema

Izan bedi m ertz duen $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua.

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2m$$

Korolaria

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua izanik, **gradu bakoitiko erpin kopurua beti bikoitia da.**

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua **erregularra:** erpin guztiek gradu bera dute. **k-erregularra:** erpin guztiek k gradua dute.

7

1.4 Ibilaldiak grafoetan

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua eta $x, y \in V$ erpinak izanik G -ko $x - y$ **ibilaldia:** honelako sekuentzia finitua

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, e_{p-1}, x_{p-1}, e_p, x_p = y$$

- x_0, x_1, \dots, x_p erpinak;
- e_1, \dots, e_p ertzak. $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$

Ibilaldiaren **luzera:** ertz kopurua, p .

- Baldin $p = 0$ orduan $x = y$: Ibilaldi **nabaria**.
- Baldin $x = y$ eta $p \geq 1$: Ibilaldi **itxia**.
- Baldin $x \neq y$: Ibilaldi **irekia**.

8

Ibilaldiak grafoetan

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzenduko $x - y$ ibilaldia:

- **Katea:** Ertz errepikaturik ez dago.
- **Zirkuitua:** Kate itxia ($x = y$).
- **Bidea:** Erpin errepikaturik ez dago.
- **Zikloa:** Bide itxia ($x = y$).

Akordioa: Zirkuituetan gutxienez ertz bat. Zikloetan gutxienez 3 ertz desberdin.

Grafo zuzenduetan: **ibilaldi zuzenduak**, **kate zuzenduak**, **bide zuzenduak**, etab.

9

Ibilaldiak grafoetan

Teorema

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua eta $x, y \in V$ bi erpin, $x \neq y$. $x - y$ ibilaldia existitzen da baldin eta soilik baldin $x - y$ bidea existitzen bada.

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua **konektatua**: $x, y \in V$ edozein bi erpinetarako $x \neq y$ izanik, $x - y$ bidea baldin badago beti.

Grafo **zuzendu konektatua**: Dagokion grafo ez zuzendua konektatua bada.

Grafo **ez konektatua**: kontrako kasuan.

10

Ibilaldiak grafoetan

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua izanik, V -ren gaineko erlazio hau baliokidetasun erlazioa da.

$x \mathcal{R} y$ baldin eta soilik baldin $x - y$ ibilaldia badago

Baliokidetasun klaseak: V_1, \dots, V_q

G -ren **osagaiak**: $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_q = (V_q, E_q)$

non $i = 1, \dots, q$, eta E_i diren V_i baliokidetasun klase bakoitzeko erpinei intzidente diren ertz guztiek osatutako multzoak.

G -ren **osagai kopurua**: $\kappa(G)$.

G **konektatua** baldin eta soilik baldin $\kappa(G) = 1$.

11

1.5 Grafoei lotutako matrizeak

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Albokotasun matrizea: $n \times n$ tamainako $A = (a_{ij})$ matrizea

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } x_i, x_j \text{ albokoak} \\ 0 & \text{baldin } x_i, x_j \text{ ez albokoak} \end{cases}$$

A simetrikoa da. Diagonal nagusian: 0-ak.

$$d(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

Teorema

Izan bitez $G = (V, E)$ begiztarik gabeko grafo ez zuzendua,

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$ eta A dagokion albokotasun matrizea.

A^p matrizeko (i, j) elementua: p luzerako $x_i - x_j$ ibilaldi kopurua.

12

1.6 Azpigrafoak. Grafo osagarria

Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa (zuzendua edo ez)

$G_1 = (V_1, E_1)$ grafoa G -ren **azpigrafo** da baldin

- $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$
- $E_1 \subseteq E$ (E_1 -eko ertz bakoitza V_1 -eko erpinekin intzidentea da).

Baldin $V_1 = V$ orduan G_1 grafoa G -ren **azpigrafo sortzailea** da. (G -k m ertz badu: 2^m azpigrafo sortzaile posible dago).

$G = (V, E)$ grafoa emanik (zuzendua edo ez); $\emptyset \neq U \subseteq V$.

U erpin azpimultzoak **induzitutako** G -ren azpigrafoa ($\langle U \rangle$):

- Erpin multzoa: U
- Ertz multzoa: $E \cap (U \times U)$ (U -ko erpinekin intzidente diren E -ko ertzak).

13

Azpigrafoak. Grafo osagarria

$G = (V, E)$ (zuzendua edo ez).

- $x \in V$ erpina **kenduz** gero, $G - x = (V_1, E_1)$
 - $V_1 = V - \{x\}$
 - E_1 : x erpinari intzidente diren ertzak ezik, E -ko gainontzeko ertz guztiak.

($G - x$ grafoa V_1 -ek induzitutako azpigrafoa da).

- $e \in E$ ertza **kenduz** gero, $G - e = (V_1, E_1)$
 - $V_1 = V$
 - $E_1 = E - \{e\}$

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$ erpin multzoa izanik.

- V -ren gaineko **grafo osotua** (K_n): erpinen arteko ertz guztiak dituen begizta gabeko grafo ez zuzendua, hau da,

$(\forall x, y \in V) \quad x \neq y \implies \{x, y\}$ ertz existitzen da

14

Azpigrafoak. Grafo osagarria

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua,

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- G -ren **osagarria**: $\bar{G} = (V, \bar{E})$ begizta gabeko grafoa, non G -ko erpinak dauden eta \bar{E} : K_n grafoan dauden eta E -n ez dauden ertzak.

Baldin $G = K_n$ orduan \bar{G} : grafo **nulua** (n erpin, 0 ertz).

$G = (V, E)$ **zatibiko grafoa**: grafo ez zuzendua, begizta gabea, non

- Existitzen dira V_1, V_2 non $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- G -ko $\{x, y\}$ ertz bakoitza: $x \in V_1$ eta $y \in V_2$.

Horretaz gain, $(\forall x \in V_1, \forall y \in V_2) \exists \{x, y\}$ ertza, orduan G

zatibiko grafo osotua. V_1 -ek n_1 erpin badu eta V_2 -k n_2 ,

$G = K_{n_1, n_2}$.

15

1.7 Grafo isomorfismoa

$G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ grafo ez zuzenduak emanik,

$f: V_1 \rightarrow V_2$ funtzioa grafo **isomorfismoa** da baldin

- f bijektiboa.
- $(\forall x, y \in V_1) \{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2$, hau da, erpinen arteko albokotasunak mantentzen baditu.

G_1 eta G_2 **isomorfoak**. $G_1 \cong G_2$.

Isomorfia erlazioa grafoen multzoaren gaineko baliokidetasun erlazioa da.

G_1 eta G_2 isomorfoak: funtsean berdinak. Erpinen izenean eta grafoak marrazteko moduan desberdintzen dira soilik; erpin kopuru bera, ertz kopuru bera, gradu bereko erpin kopuru bera, ziklo kopuru bera, etab.

16

1.8 Kate eta zirkuitu eulertarrak

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua, erpin bakaturik gabea.

- **Zirkuitu eulertarra:** G grafoko ertz guztietatik behin eta bakarrik behin igarotzen den zirkuitua.
- **Kate eulertarra:** G grafoko ertz guztietatik behin eta bakarrik behin igarotzen den kate irekia.

Grafo eulertarra: zirkuitu eulertarra badu.

Teorema

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua, erpin bakaturik gabea.

G eulertarra da baldin eta soilik baldin G konektatua bada eta G -ko erpin guztien gradua bikoitia bada.

Kate eta zirkuitu eulertarrak

Korolaria

$G = (V, E)$ ez zuzendua eta erpin bakartu gabea.

G -k kate eulertarra du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta zehazki gradu bakoitiko bi erpin baditu.

Teorema

$G = (V, E)$ grafo zuzendua, erpin bakartu gabea.

G -k zirkuitu eulertar zuzendua du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta edozein $x \in V$ erpinerako $d^+(x) = d^-(x)$ betetzen bada.

(Zirkuitu eulertar zuzendua: G -ko ertz bakoitzetik behin bakarrik pasatzen den zirkuitu zuzendua).

1.9 Bide eta ziklo hamiltondarrak

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua.

Erpin kopurua = $n \geq 3$.

- **Ziklo hamiltondarra:** erpin guztiak dituen zikloa.
- **Bide hamiltondarra:** erpin guztiak dituen bide irekia.

Ziklo hamiltondar bati ertz bat kentzean bide hamiltondarra lortzen da.

Grafo hamiltondarra: ziklo hamiltondarra duen grafoa.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

- G grafoa hamiltondarra bada, orduan G konektatua da eta $x \in V$ erpin guztiek $d(x) \geq 2$ gradua dute.
- Baldin $a \in V$ eta $d(a) = 2$ orduan a erpinarekin intzidenteak diren bi ertzak ziklo hamiltondarrean daude.
- Baldin $a \in V$ eta $d(a) > 2$ orduan ziklo hamiltondarra eraikitzeke, behin a erpinetik pasa garelara ez ditugu a -ra intzidente diren eta erabili ez ditugun ertzak kontuan izango.
- G -rentzat ziklo hamiltondarra eraikitze-prozesuan erpin guztiak ez dituen ziklo bat ezin daiteke itxi.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

Grafo hamiltondarra karakterizatzeko ez dago beharrezkoa eta nahikoa den baldintzarik.

Teorema

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua n erpinekoa. Baldin

$$\forall x, y \in V \quad (x \neq y) \quad d(x) + d(y) \geq n - 1$$

orduan G -k **bide hamiltondarra** du.

Korolarioa

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, n erpin dituen. Baldin

$$\forall x \in V, \quad d(x) \geq \frac{n-1}{2}$$

orduan G -k badu **bide hamiltondarra**.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

Teorema

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 3$ erpinekoa. Baldin

$$\forall x, y \in V \quad (x, y \text{ ez albokoak}) \quad d(x) + d(y) \geq n$$

orduan G **hamiltondarra** da.

Korolarioa

$G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 3$ erpinekoa. Baldin

$$\forall x \in V \quad d(x) \geq \frac{n}{2}$$

orduan G **hamiltondarra** da.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

Teorema

Baldin $G = (V, E)$ **hamiltondarra**, orduan edozein $V' \subset V$ azpimultzoarentzat, $\emptyset \neq V' \neq V$,

$$\kappa(G - V') \leq |V'|$$

($G - V' = (V_1, E_1)$ non $V_1 = V - V'$ eta E_1 multzoan V' -ko erpinekin intzidente diren ertzak ezik gainontzeko E ko ertz guztiak daude).

Bibliografia

- "Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones." Grimaldi, R.P. Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1997.
- Wikipedia.
https://eu.wikipedia.org/wiki/Grafo_teoría