Zenbaki Teoria. Ariketak

Zenbaki osoak. Zenbaki lehenak. Zatigarritasuna

1. Existitzen al dira honako ekuazioak betetzen dituzten $x, y, z \in \mathbb{Z}$?

   1.1 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $3x + 6y + 9z = 1000$

   1.2 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $6x + 9y + 15z = 107$

   1.3 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $5x + 10y + 20z = 1003$

2. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ hiru zenbaki oso positibo.

   2.1 Aurki itzazu a, b eta c zenbaki osoen balioak honako baldintza beteko dutenak: $31 \mid (5a + 7b + 11c)$

   2.2 a, b eta c zenbaki osoek $31 \mid (5a + 7b + 11c)$ baldintza betetzen dutela jakinda, froga ezazu honakoak betetzen direla:

   - $31 \mid (21a + 17b + 9c)$
   - $31 \mid (6a + 27b + 7c)$

3. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Baldin $b \mid a$ eta $b \mid (a + 2)$, froga ezazu $b = 1$ edo $b = 2$.

4. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$ eta biak bakoitiak. Froga ezazu $a^2 + b^2$ zenbakia 2-ren multiploa dela baina ez 4-ren multiploa, hau da, $2 \mid (a^2 + b^2)$ baina $4 \nmid (a^2 + b^2)$.

5. Izan bedi $n \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki oso positiboa.

   5.1 Froga ezazu $n \geq 2$ zenbakia konposatua bada, orduan p zenbaki lehenen bat existitzen dela non $p \mid n$ eta $p \leq \sqrt[2]{n}$.

   5.2 Aurreko atalean frogatutako ondorioa erabiliz, azter ezazu honakoak zenbaki lehenak diren: $n = 811$, $n = 467$, $n = 911$.

6. Izan bedi $n \in \mathbb{Z}^+$, eta har dezagun r zenbakiaren adierazpena 10 oinarrian

$$r = r_0 + r_1 10 + \cdots + r_{n-1} 10^{n-1} + r_n 10^n$$

   non $0 \leq r_i \leq 9$ diren $1 \leq i \leq n - 1$ eta $0 < r_n \leq 9$ den. Zatigarritasunaren propietateak erabiliz froga ezazu $9 \mid r$ baldin eta soilik baldin $9 \mid r_n + r_{n-1} + \cdots + r_0$.

7. Izan bedi $n \in \mathbb{Z}^+$, eta har dezagun bere adierazpena 10 oinarrian:

$$n = r_k 10^k + r_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + r_1 10 + r_0$$

   Zatigarritasunaren propietateak erabiliz honakoak froga itzazu:

   7.1 $2 \mid n$ baldin eta soilik baldin $2 \mid r_0$.

   7.2 $4 \mid n$ baldin eta soilik baldin $4 \mid (r_1 10 + r_0)$.

Zatiketa Euklidestarra. Zatitzaile komunetako handiena

8. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = 60$ bada eta $zkh(a, b) = 12$ bada, zeintzuk dira zenbaki hauek? Eta, $a + b = 75$ bada?

9. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ pare bakoitzarekin kalkula ezazu $zkh(a, b)$ Euklidesen algoritmoa erabiliz. Ondoren, adieraz ezazu kalkulatu berri duzun $zkh(a, b)$ balioa a eta b-ren konbinazio lineal moduan. a eta b zenbaki lehen erlatiboak al dira?

   9.1 $a = 231, b = 1820$; 9.2 $a = 1369, b = 2597$;

   9.3 $a = 2689, b = 4001$; 9.4 $a = 7982, b = 7983$;

   9.5 $a = 102, b = 28$.

10. Euklidesen algoritmoa erabiliz kalkula ezazu $zkh(-187, 154)$.

11. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, a eta b zenbaki lehen erlatiboak izanik, hau da, $zkh(a, b) = 1$.

    11.1 Froga ezazu $a \mid bc$ bada, orduan $a \mid c$ betetzen dela.

    11.2 $zkh(a, b) \neq 1$ bada, ondorio bera froga dezakezu?

12. Izan bitez $a, b, d \in \mathbb{Z}^+$, non $d = zkh(a, b)$ den. Froga ezazu $zkh(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ dela.

13. a eta b zenbaki lehen erlatiboak badira, froga ezazu, bietako bat, edo $zkh(a-b, a+b) = 1$ edo $zkh(a - b, a + b) = 2$ beteko dela.

14. $n \in \mathbb{Z}^+$ izanik, kalkula itzazu $zkh(n, n + 1)$ eta $mkt(n, n + 1)$.

15. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$.

    15.1 Demagun a eta b zenbaki lehen erlatiboak direla. Froga ezazu c zenbakia $a$ren eta $b$ren multiplo komuna bada, orduan abrena ere badela, hau da, $a \mid c$ eta $b \mid c$ orduan $ab \mid c$.

    15.2 $zkh(a, b) \neq 1$ bada, $a \mid c$ eta $b \mid c$ izanik, posible al da $ab \mid c$ ondoriora iristea?

16. Kalkula ezazu $mkt(500, 120)$ aritmetikaren oinarrizko teorema erabiliz, (zenbaki lehenen biderketa gisa deskonposatuz).

17. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Froga ezazu, $d = a + bc$ bada, $zkh(b, d) = zkh(a, b)$ dela.

18. Izan bitez $a, b, k \in \mathbb{Z}^+$. Froga ezazu $zkh(ka, kb) = k\ zkh(a, b)$ dela.

19. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki oso positiboak.

    19.1 $p \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki lehena izanik, honakoa froga ezazu.

    $$p \mid ab \quad \text{bada,} \quad p \mid a \text{ edo } p \mid b.$$

    19.2 $p \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki lehena ez bada, ondorio bera froga dezakegu? Hala ez bada, kontradibide bat eman ezazu.