ERLAZIOAK ETA FUNTZIOAK

ERLAZIOAK

1. $A = \{1,2,3\}$ multzoaren gaineko erlazio hauetako bakoitza bihurkorra, simetrikoa, antisimetrikoa edo iragankorra den azter ezazu.

$$\Re_1 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(2,3)\}, \qquad \Re_2 = \{(1,1)\}$$
$$\Re_3 = \{(1,2)\}, \qquad \Re_4 = \{(1,1),(3,2),(2,3)\}, \qquad \Re_5 = A \times A$$

2. Aztertu erlazio bitar hauetako bakoitza bihurkorra, simetrikoa, antisimetrikoa edo iragankorra den.

   a) $\mathbb{Z}^+$ multzoan $a\Re b$ baldin $a|b$
   b) $\mathbb{Z}$ multzoan $a\Re b$ baldin $a|b$
   c) $\mathbb{Z}$ multzoan $x\Re y$ baldin $x+y$ bakoitia
   d) $\mathbb{Z}$ multzoan $x\Re y$ baldin $x+y$ bikoitia
   e) $\mathbb{N}$ multzoan $a\Re b$ baldin $a \leq b$
   f) $\mathbb{N}$ multzoan $a\Re b$ baldin $a+b=10$
   g) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ multzoan $(a,b)\Re(c,d)$ baldin $a \leq c$

3. $A = \{1,2,3,4\}$ multzoa izanik, defini ezazu honako propietateak betetzen dituen A-ren gaineko $\Re$ erlazio bitar bat:

   a) Bihurkorra eta simetrikoa, baina ez iragankorra.
   b) Bihurkorra eta iragankorra, baina ez simetrikoa.
   c) Simetrikoa eta iragankorra, baina ez bihurkorra.
   d) Simetrikoa eta antisimetrikoa.

4. $\mathcal{R}$ ordena erlazioa emanik, $\mathcal{S}$ erlazioa definituko dugu honela:

$$x\mathcal{S}y \text{ baldin } y\mathcal{R}x$$

   Frogatu $\mathcal{S}$ ordena erlazioa dela eta mota berdinekoa (totala edo partziala).

5. $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ multzoan erlazio hau dugu:

$$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \text{ baldin } x_1|x_2 \text{ eta } y_2|y_1$$

   Ordena erlazioa da? Totala edo partziala?

6. Egiaztatu $\mathbb{Z}^+$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa dela hau:

$$x\Re y \text{ baldin } x = 2^n y, n \in \mathbb{Z}\text{-ren batentzat}$$

   Baliokidetasun klase hauetatik zenbat dira desberdinak: [1], [2], [3], [4]?

7. $\mathbb{N}$ multzoan erlazio hau definituko dugu:

$$x\Re y \text{ baldin } 3 \,|\, (x^2 - y^2)$$

   a) Frogatu baliokidetasun erlazioa dela.

   b) Aurkitu [0] klaseko lau elementu eta [1]-ko beste lau.

8. $\mathbb{R}^2$ multzoan erlazio hau dugu: $(x_1, x_2)\Re(y_1, y_2)$ baldin $x_1x_2 = y_1y_2$. Frogatu baliokidetasun erlazioa dela. Aztertu baliokidetasun erlazioa den $\Re'$: $(x_1, x_2)\Re'(y_1, y_2)$ baldin $x_1x_2 = y_1y_2$ eta $x_1y_1 \geq 0$.

9. E multzoan definitutako $\Re_1$ eta $\Re_2$ bi baliokidetasun erlazio izanik, $\Re$ honela definituko dugu:

$$x\Re y \text{ b.s.b. } x\Re_1 y \text{ eta } x\Re_2 y$$

   Frogatu $\Re$ baliokidetasun erlazioa dela.

10. Egiaztatu $\mathbb{R}^2$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa dela hau:

$$(x_1, x_2)\Re(y_1, y_2) \text{ baldin } x_1 = y_1$$

11. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ multzoan erlazio hau definituko dugu:

$$(x_1, x_2)\Re(y_1, y_2) \text{ baldin } x_1y_2 = x_2y_1$$

   Egiaztatu baliokidetasun erlazioa dela eta kalkulatu klaseak.

12. Izan bedi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Egiaztatu A^2-ren gaineko baliokidetasun erlazioa dela hau:

$$(x_1, x_2)\Re(y_1, y_2) \text{ baldin } x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

   Kalkulatu baliokidetasun klase hauek: $[(1, 3)]$, $[(2, 4)]$, $[(1, 1)]$; eta $\Re$-k induzitutako A^2-ren partizioa.

13. Esan ondorengoak egiazkoak ala faltsuak diren: $2 \equiv 10(\text{mod } 4)$,
   $7 \equiv 2(\text{mod } 3)$, $7 \equiv 7(\text{mod } 2)$, $3 \equiv -12(\text{mod } 5)$, $-20 \equiv 5(\text{mod } 3)$.

14. $\mathbb{Z}_6$ multzoan:

   a) Zein klasetakoa da -20?

   b) Zein dira klase hauetako elementuak [2], [3], [5]? Aurki itzazu klase bakoitzerako 4 elementu.

15. Izan bedi $\mathbb{Z}$ multzoan definitutako 5 moduluko kongruentzia. Froga ezazu baliokidetasun erlazioa dela eta kalkula ezazu $\mathbb{Z}_5$ partizioa.

$$a\Re b \quad \text{baldin} \quad a \equiv b \ (\text{mod } 5)$$

16. Izan bedi $\mathbb{Z}$ multzoan definitutako 24 moduluko kongruentzia (erloju digitala). Froga ezazu baliokidetasun erlazioa dela eta kalkula ezazu $\mathbb{Z}_{24}$ partizioa.

$$a\Re b \quad \text{baldin} \quad a \equiv b \ (\text{mod } 24)$$

FUNTZIOAK

1. Erabaki ondorengo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funtzioak ondo definituta dauden, baiezko kasuan esan injektiboak eta suprajektiboak diren.

a)	$f(x) = x + 7$	*b*)	$f(x) = 2x - 3$	*c*)	$f(x) = -x + 5$
d)	$f(x) = x^2$	*e*)	$f(x) = x^2 + x$	*f*)	$f(x) = x^3$
g)	$f(x) = \frac{1}{x-3}$				

2. Izan bedi $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. S-tik S-rako aplikazio hauek kontsideratuko ditugu: $1_S(n) = n$, $f(n) = 6-n$, $g(n) = \max\{3, n\}$, $h(n) = \max\{1, n-1\}$. Zein dira injektiboak eta zein suprajektiboak?

3. Kontsidera ditzagun $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{N}$-rako funtzio hauek: $1_{\mathbb{N}}(n) = n$, $f(n) = 3n$, $g(n) = n + (-1)^n$, $h(n) = \min\{n, 100\}$, $k(n) = \max\{0, n-5\}$. Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren.

4. Izan bitez A eta B multzo ez hutsak, eta $\mathrm{pr} : A \times B \to A$ aplikazioa, $\mathrm{pr}(x, y) = x$ izanik. Injektiboa da? Suprajektiboa da? Eta B-k elementu bakarra badu?

5. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$-tik $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-rako aplikazio hauek ditugu: $f(A, B) = A \cup B$ eta $g(A, B) = A \cap B$. Frogatu suprajektiboak direla baina ez injektiboak. Kalkulatu $\emptyset$ eta $\{0\}$-ren aurreirudiak f eta g-rentzat.

6. Izan bitez $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funtzioak: $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ eta

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ bikoitia} \\ 1 & x \text{ bakoitia} \end{cases}$$

   a) Kalkulatu $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ (g \circ h)$, $(f \circ g) \circ h$.

   b) Kalkulatu f^2, f^3, g^2, g^3, h^2, h^3, h^{500}.

7. $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{N}$-rako funtzio hauek ditugu: $f(n) = n+1$ eta $g(n) = \max\{0, n-1\}$. Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren. Frogatu $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ dugula baina $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

8. $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{N}$-rako funtzio hauek kontsideratuko ditugu: $f(n) = 2n$, eta bestalde $g(n) = n/2$ baldin n bikoitia bada eta $g(n) = (n + 1)/2$ baldin n bakoitia bada. Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren. Frogatu $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ dugula baina $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

9. Izan bedi $C = \{x^2 \text{ non } x \in \mathbb{N}\}$. Kontsidera ditzagun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to C$ eta $h : C \to \mathbb{N}$ funtzioak, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ eta $h(x) = +\sqrt{x}$.

   a) Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren.

   b) Determinatu $h \circ g \circ f$ funtzioa. Aztertu injektiboa eta suprajektiboa den.

c) Frogatu $g \circ h = 1_C$ eta $h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$.

d) Zein da g^{-1}?

10. Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ honela definitua: $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Frogatu bijektiboa dela. Kalkulatu f^{-1} eta $f \circ f$.