

Erlazioak eta funtzioak

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Informatika fakultatea
Donostia

1

ERLAZIOAK ETA FUNTZIOAK

1. Erlazio bitarrak.
 - 1.1. Definizioak.
 - 1.2. Ordena erlazioak.
 - 1.3. Baliokidetasun erlazioak.
 - 1.4. n moduluko kongruentzia.
2. Funtzioak.
 - 2.1. Definizioak.
 - 2.2. Funtzio motak.
 - 2.3. Alderantzizko funtzioa.
 - 2.4. Funtzioen konposaketa.

2

1. Erlazio bitarrak

1.1. Definizioak

Definizioa (Erlazio bitarra)

A multzoa emanik, A -ren gaineko **erlazio bitarra** $A \times A$ -ko parte den edozein \mathcal{R} azpimultzo da, hau da, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Baldin $(a, b) \in \mathcal{R}$: a elementua b -rekin **erlazionatuta** dagoela esango dugu, $a \mathcal{R} b$.

Definizioa (Biderkadura kartesiarra)

A eta B multzoen **biderkadura kartesiarra** (x, y) bikote ordenatuen multzoa da, non

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Ez nahastu: $(a, b) \neq (b, a)$, $\{a, b\} = \{b, a\}$

3

Erlazioen propietateak

A multzoaren gaineko \mathcal{R} erlazioa emanik,

- \mathcal{R} **bihurkorra**: $\forall x \in A \quad x \mathcal{R} x$
- \mathcal{R} **simetrikoa**:

$$\forall x, y \in A \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$$

- \mathcal{R} **antisimetrikoa**:

$$\forall x, y \in A \quad x \mathcal{R} y \text{ eta } y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$$

- \mathcal{R} **iragankorra**:

$$\forall x, y, z \in A \quad x \mathcal{R} y \text{ eta } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

4

1.2 Ordena erlazioak

Definizioa (Ordena erlazioa)

A multzoaren gaineko \mathcal{R} erlazioa **ordena erlazioa** da baldin bihurkorra, antisimetrikoa eta iragankorra bada.

A multzoaren gaineko \mathcal{R} ordena erlazioa emanik,

- \mathcal{R} ordena erlazio **totala** dela esango dugu baldin:

$$\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \text{ edo } y\mathcal{R}x$$

- Bestela, \mathcal{R} ordena erlazio **partziala** dela esango dugu.

1.3. Baliokidetasun erlazioak

Definizioa (Baliokidetasun erlazioa)

A multzoaren gaineko \mathcal{R} erlazioa emanik, \mathcal{R} **baliokidetasun erlazioa** da baldin bihurkorra, simetrikoa eta iragankorra bada.

Izan bitez A multzoaren gaineko \mathcal{R} baliokidetasun erlazioa eta $a \in A$ elementua. a -ren **baliokidetasun klasea** honako azpimultzoa da:

$$[a] := \{x \in A \text{ non } x\mathcal{R}a\}$$

Baliokidetasun erlazioak

Teorema

Izan bedi A-ko \mathcal{R} baliokidetasun erlazioa,

1. $(\forall x \in A) \quad x \in [x]$
2. $(\forall x, y \in A) \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x] = [y]$
3. $(\forall x, y \in A) \quad [x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$
4. $\bigcup_{x \in A} [x] = A$

A multzoaren gaineko \mathcal{R} baliokidetasun erlazio batek sortutako baliokidetasun klase guztien bildumak A-ren **partizio** bat osatzen dute; A-ren **zatidura multzoa**.

$$A/\mathcal{R} = \{[x] \text{ non } x \in A\}$$

$[a]$ -ren **ordezkaria**: $[a]$ -ko edozein elementu.

Multzo baten partizioa

A multzoaren **partizioa**: A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat da, non azpimultzo hauek elkarren artean disjuntuak diren eta guztien bildura A den.

$$\mathcal{P} = \{A_i : i \in I\} \quad (I : \text{indize multzoa})$$

- $(\forall i \in I) \quad \emptyset \neq A_i \subseteq A$ azpimultzo ez-hutsak.
- $(\forall i, j \in I) \quad A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

A_i : partizioaren **klaseak**.

1.4. Modulu finituko osokoak. n moduluko kongruentzia

Izan bedi $n \in \mathbb{Z}$ osokoa, $n > 1$ izanik. $a, b \in \mathbb{Z}$ osokoak **kongruenteak modulu n** direla esango dugu, $a \equiv b \pmod{n}$, baldin $n \mid a - b$, hau da,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{non} \quad a = b + kn.$$

n osokoak $(a - b)$ zatitzen duela esaten da.

Teorema

Izan bedi $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. n moduluko kongruentzia \mathbb{Z} -ren gaineko **baliokidetasun erlazioa da.**

Osokoen partizioa: $\mathbb{Z}_n = \{[x] \mid \text{non } x \in \mathbb{Z}\}$

2. Funtzioak

2.1. Definizioak

Definizioa (Funtzioa)

A eta B multzoak emanik, A -tik B -rako f **funtzioa** edo **aplikazioa** A -ko elementu bakoitzari B -ko elementu bat, eta bakarra, elkartzen dion legea da.

$$f : A \longrightarrow B \qquad A \xrightarrow{f} B$$

f funtzioaren **iturburu** multzoa: A , **helburu** multzoa: B .
Baldin $a \in A$ elementuari f funtzioak $b \in B$ elementua elkartzen badio: a -ren **irudia** b da eta a elementua b -ren **aurreirudi** bat.
($f(a) = b$, $a \mapsto b$).

Funtzioak

f eta g bi funtzio **berdinak** dira ($f = g$) baldin,

1. A iturburu multzo berbera badute.
2. B helburu multzo berbera badute.
3. $(\forall x \in A) \quad f(x) = g(x)$.

A multzoa emanik, A multzoaren gaineko **identitate funtzioa**: id_A , 1_A

$$id_A : A \longrightarrow A$$

funtzioa da non $id_A(x) = x$ betetzen den $\forall x \in A$.

2.2 Funtzio-motak

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa **suprajektiboa** da baldin B -ko elementu orok aurreirudirik badu ($\text{Im}f = B$).

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad / \quad f(x) = y$$

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa **injektiboa** da baldin B -ko elementu bakoitza gehienez behin agertzen bada A -ko elementu baten irudi moduan, hau da,

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad x_1 \neq x_2 \quad \implies \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

beste era batera esanda,

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \implies \quad x_1 = x_2$$

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa **bijektiboa** da baldin injektiboa eta suprajektiboa bada.

Funtzio-motak, 2.3. Alderantzizko funtzioa

Teorema

Izan bedi $f : A \rightarrow B$ funtzioa, A eta B multzo finituak izanik eta $|A| = |B|$, f suprajektiboa $\iff f$ injektiboa

Definizioa (Alderantzizko funtzioa)

Izan bedi $f : A \rightarrow B$ funtzio bijektiboa,

$\forall y \in B \exists! x \in A / f(x) = y$.

f -ren **alderantzizko funtzioa** honela definitzen da.

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$y \mapsto x$$

f suprajektiboa denez, $\exists x$ eta injektiboa ere badenez, x bakarra da. Hortaz, f^{-1} funtzioa da.

f^{-1} funtzioa ere bijektiboa da, eta $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.4. Funtzioen konposaketa

Definizioa (Funtzioen konposaketa)

Izan bitez $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$ funtzioak. f eta g -ren **funtzio konposatua** honela definitzen da:

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

non $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$ izanik.

$$\begin{array}{ccccc} g \circ f : & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Funtzioen konposaketa. Propietateak

Funtzioen konposaketa, oro har, **ez** da trukakorra. Elkarkorra bada.

Funtzio konposaketaren **propietateak**:

1. Izan bitez $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ eta $h : C \rightarrow D$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

2. $f : A \rightarrow B$ funtzioa emanik,

$$f \circ id_A = f \quad id_B \circ f = f$$

3. Izan bedi $f : A \rightarrow B$ funtzio bijektiboa,

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

Funtzioen konposaketa. Propietateak

4. Izan bitez $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$,

$$f, g \text{ injektiboak} \implies g \circ f \text{ injektiboa}$$

5. Izan bitez $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$,

$$f, g \text{ suprajektiboak} \implies g \circ f \text{ suprajektiboa}$$

6. Izan bitez $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$,

$$f, g \text{ bijektiboak} \implies g \circ f \text{ bijektiboa}$$

7. Izan bitez $f : A \rightarrow B$ eta $g : B \rightarrow C$ bijektiboak (ondorioz $g \circ f$ bijektiboa)

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Bibliografia

- Wikipedia.
https://eu.wikipedia.org/wiki/Erlazio_bitar
https://eu.wikipedia.org/wiki/Erlazio_bihurkari
<https://eu.wikipedia.org/wiki/Simetria-erlazio>
<https://eu.wikipedia.org/wiki/Antisimetria-erlazio>
<https://eu.wikipedia.org/wiki/Iragate-erlazio>
<https://eu.wikipedia.org/wiki/Ordena-erlazio>
<https://eu.wikipedia.org/wiki/Baliokidetasun-erlazio>
[https://eu.wikipedia.org/wiki/Kongruentzia_\(zenbakien.teoria\)](https://eu.wikipedia.org/wiki/Kongruentzia_(zenbakien.teoria))
[https://eu.wikipedia.org/wiki/Funtzio_\(matematika\)](https://eu.wikipedia.org/wiki/Funtzio_(matematika))